Prof. Dr. Markus Schweighofer
Fachbereich Mathematik und Statistik
Universität Konstanz
78457 Konstanz

Antrag auf Forschungsmittel

12. Oktober 2009

Projekt I: Semidefinite Darstellungen konvexer semialgebraischer Mengen

Viele Probleme in Wissenschaft, Technik und Wirtschaft lassen sich durch mathematische Modelle beschreiben und lösen. Diese Modelle führen letztendlich fast immer auf das Problem, Gleichungs- und Ungleichungssysteme in vielen Variablen (eventuell optimal bezüglich einer Zielfunktion) zu lösen. In der Regel wird bei der Modellierung viel Aufwand getrieben, um am Ende ein Ungleichungssystem zu haben, dessen Lösungsmenge ein möglichst gut verstehbares geometrisches Gebilde ist: Zum Beispiel werden Differentialgleichungen diskretisiert, Hilfsgrössen werden eingeführt (das heisst geometrisch, es wird in höhere Dimension ausgewichen) oder es wird dafür gesorgt oder einfach angenommen, dass das reale System nicht abweicht von einem bestimmten (Betriebs-)Zustand, um dem herum es sich annähernd linear verhält.

Im Idealfall stösst man auf ein *lineares Ungleichungssystem* (es kommen keine Produkte oder Potenzen der Variablen vor). Dessen Lösungsmenge ist ein (konvexes) *Polyeder*. Um eine lineare Zielfunktion darauf zu optimieren (das heisst zu minimieren oder zu maximieren), kann man *lineare Optimierung* einsetzen. Für praktische und theoretische Zwecke werden heutzutage in vielen Bereichen lineare Optimierungsprobleme mit bis zu hunderttausend Variablen und/oder Ungleichungen numerisch gelöst.

In den letzten Jahren deutet sich an, dass der restriktive Rahmen

(*) lineares Gleichungssystem — Polyeder — lineare Optimierung

in Zukunft sowohl theoretisch als auch praktisch zu einem guten Teil abgelöst werden könnte durch den analogen, aber allgemeineren Rahmen

(**) lineare Matrixungleichung — Spektraeder — semidefinite Optimierung.

Eine *lineare Matrixungleichung* ist eine Bedingung, welche besagt, dass eine symmetrische Matrix mit linearen Einträgen positiv semidefinit ist (also nur nichtnegative Eigenwerte hat). Der Spezialfall einer diagonalen Matrix liefert genau die linearen Ungleichungssysteme zurück. *Spektraeder* sind die Lösungsmengen von linearen Matrixungleichungen. Sie sind geometrisch sehr viel subtiler als Polyeder. Während zum Beispiel ein Polyeder von endlich vielen Hyperebenen begrenzt wird und nur endlich viele Seiten (z.B. Ecken, Kanten usw.) hat, kann etwa ein Spektraeder unendlich viele Seiten haben, welche allerdings alle ebenfalls *exponiert* sind (also durch Schnitt mit einer Stützhyperebene entstehen).

Semidefinite Optimierung beschäftigt sich schliesslich mit der Optimierung linearer Zielfunktionen auf Spektraedern. Es gibt dafür ebenfalls sehr effiziente numerische Lösungsverfahren, die „philosophisch" gesehen auf der Diagonalisierung symmetrischer Matrizen beruhen. Man beachte allerdings, dass die Diagonalisierung nur „lokal" betrieben werden kann (d.h. nach Einsetzung konkreter Werte für die Unbestimmten). Daher ist es auch nicht erstaunlich, dass Spektraeder eine wesentliche Verallgemeinerung von Polyedern darstellen. Es kristallisiert sich immer mehr heraus, dass der moderne Rahmen (**) viel besser für viele Anwendungen geeignet ist als (*). Zum ersten Mal wurde das ganz drastisch deutlich, als Goemans und Williamson einen bis heute nicht übertroffenen Approximationsalgorithmus für ein bekanntes kombinatorisches Graphenproblem (das MaxCut-Problem) fanden, der auf einer sehr einfachen semidefiniten Relaxierung beruht.

Ein wesentlicher Unterschied zwischen (*) and (**) ist, dass lineare Bilder von Polyedern wieder Polyeder sind, während das Analogon für Spektraeder hochgradig falsch ist. Man nennt daher lineare Bilder von Spektraedern *semidefinit darstellbar*. Zum Beispiel kann man zeigen, dass $\{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^4 + x_2^4 \leq 1\}$ kein Spektraeder ist, aber sehr wohl semidefinit darstellbar. Auch auf semidefinit darstellbaren Mengen kann man (durch Einführen von Hilfskoordinaten, auch Slack-Variablen genannt) mit Hilfe von semidefiniter Optimierung lineare Zielfunktionen optimieren. Obwohl man bei hoher (etwa exponentiell wachsender) Anzahl von Hilfsvariablen natürlich einen Preis bezüglich der Berechnungskomplexität zahlt, liegt es auf der Hand zu fragen, welche Mengen lineare Bilder von Spektraedern sind. Eine Antwort auf diese Frage würde eine ganze Menge über die Mächtigkeit von semidefiniter Optimierung aussagen.

Im Moment sind nur zwei notwendige Bedingungen dafür bekannt, dass eine Menge semidefinit darstellbar ist: Die Menge muss konvex und *semialgebraisch* sein. Eine Menge heisst *semialgebraisch*, wenn man sie als Boolesche Kombination von reellen polynomialen Ungleichungen in mehreren Variablen schreiben kann. Aus vielen Gründen kann man behaupten, dass die Klasse der semialgebraischen Mengen die kanonische Wahl ist, wenn es darum geht, eine Auswahl von i.A. nichtlinearen geometrischen Objekten zu treffen, auf denen die meisten geometrischen Operationen definiert sind und trotzdem die Objekte noch (wenigstens im Prinzip) auf einem Computer beschreibbar sind. Nach Tarskis Quantorenelimination ist ein lineares Bild einer semialgebraischen Menge wieder semialgebraisch. Eine *basisabgeschlossene semialgebraische Menge* ist die Lösungsmenge eines simultanen Systems von nicht-strikten polynomialen Ungleichungen.

In mehreren sehr tiefen Arbeiten zeigten Helton und Nie vor kurzem, dass sehr viele kompakte konvexe basisabgeschlossene semialgebraischen Mengen eine semidefinite Darstellung besitzen. Dazu benutzten sie sogenannte Lasserre-Relaxierungen (die oben genannte bahnbrechende MaxCut-Relaxierung von Goemans und Williamson stellt sich übrigens nachträglich als erste Lasserre-Relaxierung heraus). Auf dem Internationalen Mathematikerkongress 2006 in Madrid fragte Arkadi Nemirovski, ob *jede* konvexe semialgebraische Menge eine semidefinite Darstellung besitzt. Aufgrund ihrer positiven Ergebnisse, vermuteten Helton und Nie genau dies. Inzwischen liegen auch Ergebnisse von Tim Netzer (früher Konstanz, jetzt Leipzig) vor, die die Ergebnisse von Helton und Nie auf viele konvexe semialgebraische nicht notwendig abgeschlossene Mengen ausweiten. Nemirovskis Frage hat sehr viel mit Quadratsummendarstellungen von Polynomen zu tun, weshalb die Mitglieder unseres Schwerpunktes „Reelle Geometrie und Algebra“ zu den weltweiten Experten dafür zählen.

Damit zusammenhängend soll auch die Vermutung von Helton und Vinnikov untersucht werden, ob jedes RZ-Polynom eine symmetrische lineare normierte Determinantendarstellung hat. Dies würde implizieren, dass jede sogenannte *starr konvexe* Menge ein Spektraeder ist (die Umkehrung ist leicht zu sehen).

Im Einzelnen sollen unter anderem folgende Fragen untersucht werden:

(4) Sind die Kegel der kopositiven Matrizen semidefinit darstellbar? (Wenn ja, so könnte man die NP-harte kopositive Optimierung durch Einführen sehr vieler Slack-Variablen auf semidefinite Optimierung zurückführen. Sonst hätte man

ein Gegenbeispiel zur Vermutung von Helton und Nie gefunden.)

(5) Sind *Renegar-Ableitungen* von Polyedern semidefinit darstellbar? (Vermutet wird sehr stark, dass sie sogar Spektraeder sind, also sollte sich diese Frage klären lassen.)

(6) Allgemeiner: Sind Renegar-Ableitungen von Spektraedern semidefinit darstellbar? (Auch hier wird vermutet, dass sie sogar Spektraeder sind.)

(7) Es sollen algebraische Beweismethoden gefunden werden, um in bestimmten Fällen die Exaktheit der Lasserre-Relaxierung zu zeigen (und damit die semidefinite Darstellbarkeit einer der zugrundeliegenden basisabgeschlossenen semialgebraischen Mengen).

Projekt II: Spurmomente und spurpositive Polynome

Nichtkommutative Geometrie ist ein moderner Zweig der Mathematik, der Anfang der achtziger Jahre von Alain Connes ins Leben gerufen wurde. Sie stellt Werkzeuge zur Verfügung, die es ermöglichen, Räume zu untersuchen, deren Koordinatenalgebren *nichtkommutativ* sind. Populärwissenschaftlich gesprochen, könnte man sagen, dass es in so einem Raum zum Beispiel einen Unterschied macht, in welcher Reihenfolge man die Koordinaten eines Punktes miteinander multipliziert — insbesondere sind Koordinaten keine reellen Zahlen. Solche Räume spielen eine wichtige Rolle in der Physik, denn man kann damit Phänomene wie die Heisenbergsche Unschärferelation in der Quantenmechanik modellieren.

Eine seit 1976 wichtige offene Frage in dieser Theorie ist Connes' Einbettungsproblem: Lässt sich jeder Faktor vom Typ II_1 (eine Art „nichtkommutativer Wahrscheinlichkeitsraum“) in eine Ultrapotenz des hyperfiniten II_1-Faktors einbetten? In einer gemeinsamen Arbeit mit Igor Klep habe ich eine sehr überraschende rein algebraische Umformulierung für dieses Problem gefunden, welche in Spezialfällen durch numerische Experimente getestet werden kann. Die Umformulierung besagt, dass jedes symmetrische Polynome in nichtkommutierenden Variablen, dessen Spur auf dem nichtkommutativen Hyperwürfel nichtnegativ ist, dafür ein gewisses algebraisches Zertifikat besitzt. Das kommutative Analogon und das Analogon ohne die Spur wurden beide in den letzten Jahren von Putinar bzw. Helton und McCullough bewiesen.

Obwohl die Umformulierung bereits rein algebraisch ist, sind für Polynome in nichtkommutierenden Variablen doch sehr wenige mächtige algebraische Hilfsmittel bekannt. Ganz anders ist das, wenn man Polynome modulo den algebraischen Identitäten betrachtet, die von allen Matrizen einer gewissen fixierten Grösse erfüllt werden. Dann bekommt man plötzlich einen PI-Ring, nämlich den Ring der generischen Matrizen. Dort gibt es dann zum Beispiel nichttriviale Resultate von Procesi und Schacher, die von der Idee her ähnlich sind wie eine PI-Version unserer algebraischen Umformulierung von Connes' Frage. Es handelt sich also für jede fixierte Matrizengrösse um eine „noch algebraischere“ Version, die allerdings nicht mehr zur ursprünglichen Frage äquivalent ist.

Wir möchten nun ein gutes Stück auf dem vermutlich langen Weg zu folgenden Zielen weiterkommen:

(8) Beweise für Analoga der algebraischen Version von Connes' Vermutung für PI-Ringe, etwa für den Ring der generischen Matrizen einer bestimmten fixierten Grösse.

(9) Konstruktionen, die inversen Limiten über die Matrizengrösse ähneln, und Informationen über das ursprüngliche Problem von Connes liefern.

Lieb und Seiringer (Princeton) haben vor einiger Zeit eine etwa genauso lange (seit 1975) bekannte offene Vermutung, die BMV-Vermutung aus der statistischen Quantenmechanik, rein algebraisch umformuliert als eine Familie von polynomialen Spurungleichungen. Es war die Idee von Igor Klep (Ljubljana und Maribor) und mir, mit numerischen und kombinatorischen Methoden nach algebraischen Zertifikaten für diese Spurungleichungen zu suchen (obwohl diese auch bei Bestehen der Ungleichung nicht notwendig existieren müssen). Im Hintergrund steht ein Resultat von Chris Hillar (MSRI, Berkeley), welches besagt, dass es ausreicht, gewisse Teilfamilien der betreffenden Polynomen zu betrachten. Für die Polynome von kleinem Grad haben Daniel Hägele (Ruhr-Universität Bochum), Igor Klep und ich die Existenz der Zertifikate geklärt. Meine Doktorandin Sabine Burgdorf hat die Frage als erste für eine nichttriviale unendliche Teilfamilie gelöst. Danach wurden nacheinander alle anderen Polynome klassifiziert von Speer und Landweber (Rutgers), Collins (U Ottawa), Dykema und Torres-Ayala (Texas A& M) und Janez Povh (Novo Mesto). Das Ergebnis ist leider, dass die verwendeten Positivitätszertifikate zu selten existieren, um die BMV-Vermutung damit zu beweisen. Nun soll auf verschiedenen Wegen versucht werden, aus der Sackgasse zu kommen:

(10) Es soll über neue allgemeinere Zertifikate für Spurpositivität nachgedacht werden.

(11) Es soll die Dualität zwischen Spurpositivität und dem Spurmomentenproblem benutzt werden, um dann über eine Lösung des flachen Momentenproblems numerische Zertifikate zu erhalten.

(12) Motiviert durch (11), aber auch unabhängig davon hochinteressant, soll das flache Spurmomentenproblem gelöst oder widerlegt werden.