0.1. **Thema des Projekts.** Selbstkonkordante Barrieren für Kegel nichtnegativer Polynome

0.2. **Publikationen aus diesem Projekt.** Die Artikel [1–5][1] sind veröffentlicht. Die Arbeiten [6], [7] und [9] sind eingereicht. Die Arbeit [8] wird in den kommenden Monaten fertiggestellt. Ein weiterer Artikel [10] wird anvisiert. Durch Betreuung von Doktoranden im Rahmen des Projektes entstanden bisher die Arbeiten [I1–I3]. Außerdem wurden die vier Diplomarbeiten [D1–D4] im Rahmen des Projektes betreut.

1. Arbeits- und Ergebnisbericht

1.1. **Ausgangsfragen und Zielsetzung des Projekts.** Die semidefinite Optimierung ist eine Verallgemeinerung der linearen Optimierung. Beide kann man beschreiben als die Optimierung einer linearen Funktion auf dem Schnitt $K \cap A$ eines regulären *festen* Kegels K mit einem *beliebigen* affinen linearen Unterraum A eines reellen Vektorraums F. Dabei nennen wir $K \subseteq F$ einen *regulären Kegel*, wenn K ein konvexer abgeschlossener Kegel mit nichtleerem Inneren ist, der keine Gerade enthält.

Im Falle der linearen Optimierung ist $K = [0, \infty)^n$ der nichtnegative Orthant im Raum $F = \mathbb{R}^n$. Im Falle der semidefiniten Optimierung ist $K = S\mathbb{R}_+^{n \times n}$ der Kegel der positiv semidefiniten Matrizen im Raum $F = S\mathbb{R}^{n \times n}$ der reellen symmetrischen $n \times n$-Matrizen. Die semidefinite Optimierung erweitert sozusagen die lineare Optimierung von Diagonalmatrizen auf beliebige symmetrische Matrizen, was erstaunlich viele neue Möglichkeiten eröffnet, ohne die guten numerischen Eigenschaften und die praktische Einsetzbarkeit zu sehr zu gefährden.

In der Tat, können semidefinite Optimierungsprobleme sehr effizient durch sogenannte Innere-Punkte-Methoden gelöst werden: Ist $K \subseteq F$ ein regulärer Kegel, so wandern diese Methoden im Inneren von K entlang (ab)steigender (etwa linearer) Zielfunktion. Die Schwierigkeit ist, den Auf- oder Abstieg so zu lenken, daß man den Kegel nicht verläßt und sich trotzdem recht schnell seinem Rand nähert.

Zu Beginn der 90er Jahre haben Yurii Nesterov und Arkadii Nemirovskii gezeigt, daß eine solche Lenkung immer möglich ist, wenn man eine *Barriere* für K als Orakel zuläßt. Dies ist eine reellwertige konvexe Funktion auf dem Inneren von K, die gegen ∞ strebt, wenn man sich einem Punkt auf dem Rand annähert und deren ersten drei Ableitungen in gewisser Weise ineinander verschränkt sind. Wir geben hier keine präzise Definition, weisen aber darauf hin, daß die beiden notwendigen Abschätzungen der Ableitungen oft auf eine unproblematische Ungleichung vom Typ Cauchy-Schwarz und eine sehr schwierig zu beweisende *inverse* Hölderungleichung hinauslaufen.

Nesterov und Nemirovskii haben außerdem gezeigt, daß jeder reguläre Kegel eine (sogenannte universelle) Barriere besitzt, die allerdings durch ein Integral definiert ist, welches man in der Regel numerisch nicht verwerten kann. Sei $\langle ., . \rangle$ ein Skalarprodukt auf F und bezeichne

$$K^* := \{f \in F \mid \forall g \in K : \langle f, g \rangle \geq 0\}$$

den zu K *dualen Kegel*. Man weiß, daß $K^{**} = K$. Bezeichne

$$\varphi_K\colon \operatorname{int} K \to \mathbb{R},\ f \mapsto \int_{K^*} e^{-\langle f,g \rangle} dg$$

[1]Siehe Literaturverzeichnis am Ende des Berichts.

die 1957 von Max Köcher eingeführte *charakteristische Funktion* des Kegels K. Osman Güler hat 1996 entdeckt, daß die universelle Barriere (bis auf eine Konstante) gleich $\log \circ \varphi_K$ ist. Im Allgemeinen erweist sich aber eben φ_K als numerisch unbrauchbar.

Eine der seltenen Ausnahme in dieser Hinsicht bietet die semidefinite Optimierung: Man kann zeigen, daß die universelle Barriere des Kegels $S\mathbb{R}_+^{n\times n}$ (bis auf eine Konstante und einen Faktor) genau die Funktion

$$\operatorname{int} S\mathbb{R}_+^{n\times n} \to \mathbb{R},\ M \mapsto -\log\det M$$

ist, die man sehr effizient numerisch berechnen kann. Identifiziert man eine quadratische Form in n Variablen mit der zugehörigen symmetrischen $n \times n$-Matrix, so erhält man damit eine sehr gute Barriere für den Kegel der positiv semidefiniten quadratischen Formen, den wir in der gleich folgenden Notation mit $P_{n,2}$ bezeichnen.

Sei $2 \leq n \in \mathbb{N}$ und $k \in \mathbb{N}$. Wir bezeichnen mit $P_{n,2k}$ der positiv semidefiniten $2k$-Formen und $Q_{n,2k}$ den Kegel der $2k$-ten Potenzen von Linearformen. Beide sind reguläre Kegel in $F_{n,2k}$ und es gilt $Q_{n,2k} \subseteq P_{n,2k}$. Wir statten $F_{n,k}$ mit dem klassischen Skalarprodukt aus, für welches $\langle f, g\rangle = g(a)$ gilt für alle $a \in \mathbb{R}^n$ und $f := (a_1X_1 + \cdots + a_nX_n)^{2k} \in Q_{n,2k}$. Dann gilt $Q_{n,2k}^* = P_{n,2k}$. Dies illsutriert die Doppelrolle, die von $2k$-ten Potenzen von Linearformen gespielt wird: Einerseits sind es Polynome, andererseits kodieren sie einen Punkt des $\mathbb{R}^n$. Auf der Suche nach einer für praktische Zwecke nützlicheren Barriere für den Kegel $K = P_{n,2k}$ hatte Eberhard Becker daher die Idee, über die Punkte des $\mathbb{R}^n$ zu integrieren statt über den dualen Kegel $K^* = Q_{n,2k}^{**} = Q_{n,2k}$. Die Idee war daher, in der Definition, $\int_{Q_{n,2k}} e^{-\langle f,g\rangle} dg$ in der Definition von φ_K durch $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-f(a)} da$ zu ersetzen. Eine kleine Rechnung zeigt, daß letzteres Integral bis auf einen Faktor gleich $\int_{S^{n-1}} \frac{1}{f^\alpha}$ ist, wobei die Einheitssphäre S^{n-1} des $\mathbb{R}^n$ mit dem rotationsinvarianten Wahrscheinlichkeitsmaß ausgestattet ist und $\alpha = \frac{n}{2k}$ ist. Eberhard Becker, Andreas Bernig et Antonio Díaz-Cano haben daran gearbeitet und etliche Indizien dafür gesammelt, daß

$$B : \operatorname{int} P_{n,2k} \to \mathbb{R},\ f \mapsto \log \int_{S^{n-1}} \frac{1}{f^\alpha}$$

eine Barriere für $\alpha \geq \frac{n-1}{2}$ sein könnte. Das Hauptziel des Projektes war, zu klären, ob dem so ist, und zumindest im positiven Fall aus diesen Ideen dadurch bessere Barriere für etliche interessante Kegel abzuleiten, die sich in Kegeln der Form $P_{n,2k}$ „verstecken“.

1.2. **Entwicklung der durchgeführten Arbeiten.** Da die Mittel für den numerisch-experimentellen Teil des Projektes, insbesondere die volle Stelle nach BAT IIa für Herrn Dipl.-Math. T. Burger sowie die Hilfskraftstelle, nicht bewilligt wurden und außerdem der Mitantragsteller Prof. Dr. Fliege eine Stelle in Southampton angetreten hat, mußte man sich auf den theoretischen Teil des Projektes konzentrieren. Dort wurde zunächst sehr viel Zeit auf die Hauptvermutung (Nachweis der Barriereneigenschaft von B) verwendet und die im Projektantrag vorgestellten Ansätze verfolgt.

Viel Zeit wurde zunächst auf den Versuch verwendet, Gülers Beweis [Gul] für die die Barriereneigenschaft von $\log \circ \varphi_K$ zu imitieren, um die kritische inverse Hölderungleichung zu zeigen, da dieser Beweis sehr viel eleganter ist und verallgemeinerungsfähiger erscheint als der von Nesterov und Nemirovskii. Güler benutzt ein weiter unten noch erwähntes Resultat von Jean Bourgain [Bou] aus dem Jahr 1991. Zunächst ergab sich hier kein Fortschritt. Diskussionen mit Güler auf der Konferenz „Polynômes positifs“ im März 2005 am CIRM in Luminy ergaben, daß man alternativ statt [Gul] auch die neuere „Nadeltechnik“ von von Kannan, Lovász und

Simonovits [KLS] verwenden kann. Obwohl diese in unserem Problem alles auf rationale Funktion in nur *einer* Variablen zurückspielt, kam nach längerer Zeit kein Ergebnis zustande (aus gutem Grund, wie sich später herausstellte, siehe unten).

Etwas mehr Bescheidenheit war angebracht, weshalb versucht wurde, weitere Situationen zu finden, in denen man die universelle Barriere (teilweise) ausrechnen kann, ähnlich wie es Faybusovich für Tschebyscheffsysteme gemacht hat [Fay]. Es wurden hierzu Quadraturformeln gesucht, die das leisten, was für Polynomfunktionen mit einer Variablen die Quadraturformeln „mit doppelter Präzision“ schaffen, nämlich eine hinreichend gute Parametrisierung des dualen Kegels K^* zu liefern. Auch dies führte letztlich zu keinen direkten Fortschritten. Unter anderem untersuchten wir, wie im Projektantrag angekündigt, in diesem Rahmen symmetrische Polynome und die „Testmengensätze“ von Timofte im Zusammenhang mit dem Kegel $Q_{n,2k}$. Dies brachte zwar Licht in den Satz von Timofte (siehe die Diplomarbeit [D2]), führte aber auch nicht auf die notwendigen Quadraturformeln. Zusammen mit Dr. Igor Klep, der einen längeren Aufenthalt mit dem damaligen europäischen Netzwerk RAAG in Konstanz vornahm, versuchten wir dann, $\log \circ \varphi_K$ gegen gegen B abzuschätzen im Fall $n = 2$ (genauer dehomogenisierten wir die Polynome und ersetzten den Einheitskreis $S^{n-1} = S^2$ durch ein Intervall, um die Formeln von Faybusovich [Fay] anwenden zu können). Der Wert von α wurde dabei passend gewählt. Es ergab sich durch symbolisch-numerische Rechnungen, daß eine gegenseitige Abschätzung nicht möglich ist.

Es schien sich sich immer mehr herauszukristallisieren, daß „Innere-Punkte-Methoden jenseits der semidefiniten Optimierung“ (so der Punkt im entsprechenden Projektantrag) nicht oder nicht einfach zu realisieren sind. Dies steht im Einklang mit dem kürzlichen Beweis der Lax-Vermutung [LPR], welche unter anderem besagt, daß gewisse Hyperbolizitätskegel, von denen man wußte daß effiziente Innere-Punkte-Methoden dafür existieren, in Wirklichkeit mit semidefiniter Optimierung modelliert werden können.

Folglich wendeten wir uns dann zunächst dem im Projektantrag genannten Punkt „Approximation durch semidefinite Optimierung“ durch semidefinite Optimierung zu, wo viele wichtige und neue Ergebnisse erzielt wurden (siehe unten).

Nachdem der Mitarbeiter Markus Schweighofer einer Einladung von Leonid Faybusovich (University of Notre Dame) nachging, kamen durch Diskussionen dann noch einmal neue Impulse zustande, die zusammen mit Igor Klep zu einer vorläufig noch experimentellen Widerlegung der Hauptvermutung, nämlich der Barriereneigenschaft von B selbst für $n = 2$ (falls $k \geq 2$ und $\alpha \in \{\frac{n-1}{2k}, \frac{n}{2k}, \frac{n}{k}\}$). Allerdings scheinen nun auch positive Ergebnisse in dieser Richtung zum Greifen nahe, zum Beispiel eine neue Barriere für den Kegel der kopositiven Matrizen (siehe unten). Da eine Verlängerung des Projektes wegen des Wegzugs von Markus Schweighofer nach Rennes nicht mehr beantragt wurde, sind diese Ergebnisse immer noch nicht sauber verifiziert und aufgeschrieben.

1.3. **Ergebnisse.** In [1] konnte ein wesentlicher Fortschritt zur Berechnung globaler Infima von Polynomen mit Hilfe semidefiniter Optimierung gemacht werden (und damit zur Frage, ob ein gegebenes $f \in F_{n,2k}$ in $P_{n,2k}$ liegt). Es wurde ein tiefliegender Darstellungssatz bewiesen, der zertifiziert, daß ein gegebenes nichtnegatives Polynom auf einem sogenannten „Gradientententakel“ nichtnegativ ist. Diese Tentakel beinhalten die Menge der reellen kritischen Punkte, sind aber im Gegensatz zur letzteren bei geeigneter Wahl immer groß genug, um die Nichtnegativität auf ganz $\mathbb{R}^n$ zu garantieren.

In [2] wurde die Komplexität des Positivstellensatzes von Putinar untersucht.

In [3] wurde ein Nichtnegativstellensatz für Polynome in nichtkommutierenden Variablen entwickelt. In gewisser Weise verhält sich Positivität viel angenehmer für nichtkommutierenden Variablen als im kommutativen Fall, zumindest was den Bezug zur semidefiniten Optimierung angeht. Es bleibt die Frage, ob man das für Barrieren ausnutzen kann, wenn man die Kommutativität aufgibt.

In [4] wurde eine neuer sehr direkter Zugang zu Quadratsummendarstellungen für „dünn besetzte“ Polynome entwickelt. Dieser Satz ging auf überraschende Weise ganz wesentlich ein, um für gewisse semialgebraische Mengen zu beweisen, daß sie durch semidefinite Optimierung modelliert werden können (siehe unten).

Die Arbeiten [5] und [6] handeln von zwei berüchtigten Problemen, die durch die Theorie der Von-Neumannalgebren bzw. der Quantenmechanik motiviert sind und deren Lösung interessante mathematische Folgerungen hätte. Es sind dies die Einbettungsvermutung von Connes und die BMV-Vermutung. Erstere Vermutung wurde zum ersten Mal rein algebraisch formuliert, und zwar in einer Weise, daß nun numerische Untersuchungen mittels semidefiniter Optimierung möglich sind. Die zweite Vermutung wurde in der algebraischen Version von Lieb und Seiringer mittels semidefiniter Optimierung untersucht und in erstaunlich vielen Spezialfällen bewiesen.

Der Preprint [7] beschäftigt sich mit dem trunkierten Momentenproblem von Curto und Fialkow. Genauer wird dort ein neuer Beweis dafür gegeben, daß jede flache Momentenmatrix (dies sind bestimmte Elemente auf dem Rand von $Q_{n,2k} = P^*_{n,2k}$ von einer Quadraturformel kommt. Dies Ergebnis geht in die oben angedeutete Richtung einer versuchten guten Parametrisierung von $P_{n,2k}$.

Der Artikel [8] wird in einigen Monaten fertig sein und stellt eine wesentliche Weiterentwicklung der Diplomarbeit von Sabine Burgdorf [D3] dar (siehe unten), die unter anderem dazu dient, die Punkte auf dem Rand von $P_{n,2k}$ besser zu verstehen. Die Arbeit [9] beschäftigt sich hier speziell mit Polynomen in zwei Variablen.

Die Ergebnisse, die am ehesten genau der Richtung des Projektantrags entsprechen sollten, sobald es die Zeit zuläßt, in einem Artikel [10] aufgehen. Da zu dieser Arbeit schriftlich noch nicht erhältlich ist (auch bedingt durch die wegen der personellen Umstände nichtbeantragte Verlängerung des Projektes), gehen wir auf die Hauptergebnisse ein. Wir erinnern daran, daß es darum ging, ob B für $k \geq 2$ und geeignetes α eine Barriere für $P_{n,2k}$ ist. Diese Funktion ist zwar nicht leicht auszuwerten, aber schon für $k = 2$ kann man nicht damit rechnen, eine Barriere zu finden, die für praktische Zwecke ähnlich gut ist wie die Funktion $-\log \circ \det$, die man für die semidefinite Optimierung hat.

Es konnte gezeigt werden, daß dies stimmt für $k = 1$ (also für quadratische Formen) und $\alpha = \frac{n}{2}$. Genauer wurde gezeigt, daß B in diesem Fall bis auf eine Konstante und einen Faktor gleich $\log \circ \varphi_K$ (und daher gleich $-\log \circ \det$) ist, was im Allgemeinen für andere (k, α) nicht richtig ist, wahrscheinlich für kein einziges Paar (k, α) mit $k \geq 2$.

Der zweite Beitrag betrifft das oben erwähnte Resultat von Bourgain, welches wie folgt lautet: Für jedes $D \in \mathbb{N}$ und $p \in \mathbb{R}_{\geq 1}$ gibt es $c > 0$ (unabhängig von D und p!) derart, daß für alle $n \in \mathbb{N}$, für alle reellen Polynome g in n Variablen vom Grad höchstens D und für allen konvexen Mengen $S \subseteq \mathbb{R}^n$ von endlichem Lebesguemaß gilt

$$\sqrt[p]{\frac{\int_S |g|^p}{\int_S 1}} \leq c \frac{\int_S |g|}{\int_S 1}.$$

Güler benutzte dieses Resultat nur für $D = 1$, sogar ohne auszunutzen, daß c nicht von n abhängt. Mit demselben Ergebnis für $D = 2$ konnte ich direkt zeigen, daß B eine Barriere ist für $(k, \alpha) = (1, \frac{n}{2})$ (ohne den Umweg über $-\log \circ \det$ zu gehen).

Das theoretisch noch nicht verifizierte Hauptergebnis wird unterdessen aller Voraussicht nach sein (alle Rechnungen symbolisch-numerischen Rechnungen deuten darauf hin), daß B *niemals* eine Barriere ist, sobald $k \geq 2$ und $\alpha \in \{\frac{n-1}{2k}, \frac{n}{2k}, \frac{n}{k}\}$.

Dennoch gibt es auch sehr Erfreuliches zu berichten: Dies betrifft den Kegel der kopositiven Matrizen, den man für $k = 2$ in $P_{n,2k} = P_{n,4}$ ($n \in \mathbb{N}$) wiederfindet: Man nennt eine Matrix $M \in S\mathbb{R}^{n\times n}$ *kopositiv*, wenn die gerade Quartik $q(X_1^2, \dots, X_n^2) \in F_{n,4}$ in $P_{n,4}$ liegt, wobei $q \in F_{n,2}$ die zu M gehörende quadratische Form ist. Wenn man also $P_{n,4}$ mit dem Unterraum der geraden Formen in $F_{n,4}$ schneidet, erhält man den Kegel der kopositiven Matrizen. Dieser Kegel führt zur kopositive Optimierung.

Wir haben wesentliche Indizien dafür gesammelt, daß die Einschränkung von B auf den den genannten Unterraum der geraden Formen wahrscheinlich eine Barriere für den Kegel B' der kopositiven Matrizen liefern könnte. Dies wäre das erste uns bekannte Beispiel überhaupt einer gefundenen Barriere, welche sich nicht nur als leichte Abwandlung der universellen Barriere entpuppt oder durch Nesterov und Nemirovskiis „Barrier-Kalkül" aus universellen Barrieren entsteht!

1.4. **Verwertbarkeit.** Die Ergebnisse aus [1] können, wie in der Arbeit beschrieben, tatsächlich sofort für jedermann zur globalen Optimierung von Polynomen mittels bestehender Matlab-Pakete eingesetzt werden.

Die Arbeit [2] ist bereits ganz wesentlich und in überraschender Weise eingegangen im ersten nichttrivialen Ergebnis zur grundlegenden Frage, welche konvexen semialgebraischen Mengen durch ein semidefinites Optimierungsproblem mit Hilfsvariablen dargestellt werden können [HN1, HN2].

Die Arbeiten [5, 6] wurden von der Funktionanalysisgemeinde sehr interessiert wahrgenommen und könnte eine weitere Kooperation zwischen der Reellen Algebra und der Funktionalanalysis führen sowie zu einer Lösung von Connes' Einbettungsproblem und der BMV-Vermutung.

Zur anvisierten Arbeit [10] sei folgende Spekulation vermerkt: Wenn man beachtet, daß B für $k = 1$ und $\alpha = \frac{n}{2}$ im Wesentlichen gleich $-\log \circ \det$ ist und daher assoziiert ist zum algebraischen Konzept der Determinanten, kann man sich fragen, ob das oben eingeführte B' in irgendeinem zu präzisierenden Sinne für den Kegel der kopositiven Matrizen die algebraische Rolle übernehmen kann, die die die Determinante für den Kegel der positiv semidefiniten Matrizen hat. Diese Idee scheint nicht so abwegig, wenn man beachtet, daß man für jeden symmetrischen (das heißt selbstdualen und homogenen) Kegel den umgebenden Vektorraum mit einer Multiplikation ausstatten kann derart, daß er eine Jordanalgebra wird, in der die Quadrate genau die Elemente von K sind. Im Falle $K = S\mathbb{R}^{n\times n}$, kann man zum Beispiel das matrizielle Jordanprodukt und die gewöhnliche Matrizeninversion mit den Köcherschen Konstruktionen aus $\log \circ \det$ zurückgewinnen (dies war ein wesentlicher Inhalt der Diplomarbeit [D4]). Man sollte anvisieren, ähnliche Konstruktionen zu finden, die eine wie auch immer geartete algebraische Struktur liefern, wenn man zum Beispiel von B' anstelle von $\log \circ \varphi_K$ ausgeht.

1.5. **Beiträge.** Folgende Personen haben zu den Ergebnissen des Projektes beigetragen:

- Prof. Dr. A. Prestel, Hauptantragsteller, Lehrstuhlinhaber an der Universität Konstanz: [9]
- Prof. Dr. Jörg Fliege, Mitantragsteller, Direktor des CORMSIS der University of Southampton: Bericht zum Besuch des Symposiums „19th International Symposium on Mathematical Programming"
- Prof. Dr. Leonid Faybusovich, University of Notre Dame: wichtige Diskussion über Barrieren mit Markus Schweighofer
- Prof. Dr. Andreas Bernig, SNSF-Professor an der Université de Fribourg: Diskussionen mit Markus Schweighofer über Vorarbeiten und über die Nadeltechnik
- Prof. Dr. M.E. Canto Cabral, Faculdade Farias Brito, Fortaleza: [9]

- Dr. habil. Markus Schweighofer, Maître de Confrence an der Université de Rennes 1, längere Zeit im Rahmen dieses DFG-Projektes in Konstanz angestellt: [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10]
- Dr. habil. Igor Klep, zur Zeit Post-Doc an der UC San Diego, mehrere Male für längere Zeit zu Besuch in Konstanz, einen Monat im Rahmen dieses DFG-Projektes angestellt: [3, 5, 6, 10]
- Sabine Burgdorf, Doktorandin im deutsch-französischen Cotutelle-Verfahren zwischen Rennes und Konstanz: [D3, I3, 8]
- David Grimm, Doktorand an der Universität Konstanz: [D2, 4]
- Tim Netzer, Doktorand an der Universität Konstanz: [D1, I1, I2, 4]
- Ruben Pallesche, Mathematiklehrer: [D4]

1.6. **Qualifikation des wissenschaftlichen Nachwuchses.** Im Rahmen dieses Projektes wurden die vier Diplomarbeiten [D1–D4] von Tim Netzer, David Grimm, Sabine Burgdorf und Ruben Pallesche erfolgreich betreut. Die ersten drei dieser Diplomanden promovieren nun. Im Zusammenhang mit der Betreuung des durch dieses Projekt finanzierten Mitarbeiters Markus Schweighofer sind im Rahmen dieser Promotionen bereits die drei Artikel [I1–I3] entstanden. Schließlich hat Herr Schweighofer bei Projektende an der Universität Konstanz habilitiert.

2. Zusammenfassung

Das Projekt „Barrieren“ brachte zutage, wie schwierig es zu sein scheint, andere als die universellen Barrieren für konvexe Kegel zu finden. Dennoch wurden erste Ansätze hierzu entwickelt. Unterdessen gab es erstaunlich große Fortschritte im Bereich von Quadratsummendarstellungen von nichtnegativen Polynomen und der daraus resultierenden Anwendung on semidefiniter Optimierung auf polynomial Optimierungsprobleme. Grob gesagt scheinen die Ergebnisse des Projektes in die Richtung zu gehen, daß semidefinite Optimierung schon am Limit dessen zu sein scheint, wozu man noch gute Innere-Punkte-Methoden findet, daß andererseits aber semidefinite Optimierung noch besser als bisher angenommen geeignet ist, polynomiale Optimierungsprobleme durch Relaxierung zu lösen.

Literatur

[Bou] J. Bourgain: On the distribution of polynomials on high dimensional convex sets, *Lect. Notes Math.* 1469 (1991), 127–137

[Duo] J. Duoandikoetxea: Reverse Hölder inequalities for spherical harmonics, *Proc. Am. Math. Soc.* 101 (1987), 487–491

[Fay] L. Faybusovich: Self-concordant barriers for cones generated by Chebyshev systems, *SIAM J. Optim.* 12 (2002), no. 3, 770–781

[Gul] O. Güler: On the self-concordance of the universal barrier function, *SIAM J. Optim.* 7 (1997), no. 2, 295–303

[HN1] J.W. Helton, J. Nie: Semidefinite representation of convex sets, eingereicht `http://arxiv.org/abs/0705.4068v3`

[HN2] J.W. Helton, J. Nie: Sufficient and Necessary Conditions for Semidefinite Representability of Convex Hulls and Sets, eingereicht `http://arxiv.org/abs/0709.4017`

[KLS] R. Kannan, L. Lovász, M. Simonovits: Isoperimetric problems for convex bodies and a localization lemma, *Discrete Comput. Geom.* 13 (1995), no. 3-4, 541–559

[LPR] A.S. Lewis, P.A. Parrilo, M.V. Ramana: The Lax conjecture is true, *Proc. Amer. Math. Soc.* 133 (2005), no. 9, 2495–2499

[Tim] V. Timofte: On the positivity of symmetric polynomial functions I: General results, *J. Math. Anal. Appl.* 284 (2003), no. 1, 174–190 (2003)

[D1] T. Netzer: High Degree Perturbations of Nonnegative Polynomials, Diplomarbeit, Universität Konstanz (2005) `http://perso.univ-rennes1.fr/markus.schweighofer/da/tim.pdf`

[D2] D. Grimm: Positivität symmetrischer Polynome, Diplomarbeit, Universität Konstanz (2005) `http://perso.univ-rennes1.fr/markus.schweighofer/da/david.pdf`

[D3] S. Burgdorf: Reine Zustände auf Idealen und Darstellung nichtnegativer Polynome, Diplomarbeit, Universität Konstanz (2005) `http://perso.univ-rennes1.fr/markus.schweighofer/da/sabine.pdf`

[D4] R. Pallesche: Symmetrische Kegel und Jordanalgebren, Diplomarbeit, Universität Konstanz (2006) `http://perso.univ-rennes1.fr/markus.schweighofer/da/ruben.pdf`

[I1] J.B. Lasserre, T. Netzer: SOS approximations of nonnegative polynomials via simple high degree perturbations, *Math. Z.* 256 (2007), no. 1, 99–112

[I2] T. Netzer: An elementary proof of Schmüdgen's theorem on the moment problem of closed semi-algebraic sets, *Proc. Amer. Math. Soc.* 136 (2008), 529–537

[I3] S. Burgdorf: Sums of hermitian squares as an approach to the BMV conjecture, eingereicht `http://arxiv.org/abs/0802.1153`

[1] M. Schweighofer: Global optimization of polynomials using gradient tentacles and sums of squares, *SIAM J. Optim.* 17 (2006), no. 3, 920–942

[2] J. Nie, M. Schweighofer: On the complexity of Putinar's Positivstellensatz, *J. Complexity* 23 (2007), no. 1, 135–150

[3] I. Klep, M. Schweighofer: A nichtnegativstellensatz for polynomials in noncommuting variables, *Israel J. Math.* 161 (2007), 17–27

[4] D. Grimm, T. Netzer, M. Schweighofer: A note on the representation of positive polynomials with structured sparsity, *Arch. Math.* 89 (2007), no. 5, 399–403

[5] I. Klep, M. Schweighofer: Connes' embedding conjecture and sums of hermitian squares, *Adv. Math.* 217 (2008), no. 4, 1816-1837

[6] I. Klep, M. Schweighofer: Sums of hermitian squares and the BMV conjecture, eingereicht `http://arxiv.org/abs/0710.1074`

[7] M. Schweighofer: A Gröbner basis proof of the flat extension theorem for moment matrices, eingereicht `http://arxiv.org/abs/0801.4243`

[8] S. Burgdorf, M. Schweighofer: Pure states on ideals, nonnegative polynomials and sums of squares, in preparation

[9] M.E. Canto Cabral, A. Prestel: Quadratic moduls of polynomials in two variables, erscheint in *Adv. Geom.*

[10] I. Klep, M. Schweighofer: Barrier functions of cones of nonnegative polynomials, unfinished notes