Riemannsche Geometrie

Jan-Hendrik Treude, Wolfgang Maurer
FB Mathematik & Statistik, Wintersemester 2018/19

Universität Konstanz

Aufgabenblatt 2

Abgabe am Montag 19.11.18 vormittags
bei Wolfgang Maurer (F529)

Aufgabe 2.1 (Minimierende Kurven sind Geodäten)

a) Sie $c : [a,b] \to M$ eine stückweise glatte Kurve und $V : [a,b] \to TM$ ein stückweise glattes Vektorfeld längs c (d.h. es gilt $V(t) \in T_{c(t)}M$ für alle $t \in [a,b]$). Zeigen Sie, dass es eine stückweise glatte Variation $\sigma : (-\varepsilon,\varepsilon) \times [a,b] \to M$ von c gibt mit $\partial_s\sigma(0,t) = V(t)$ für alle $t \in [a,b]$.

(*Hinweis:* Versuchen Sie einen ähnlichen Ansatz für σ wie zu Beginn des Beweises des Gauß-Lemmas, d.h. nutzen Sie die Exponentialabbildung.)

b) Beweisen Sie mit Hilfe von Teil **a)** und dem Satz über die erste Variation der Bogenlänge, dass kritische Punkte des Bogenlängenfunktionals $L : \Omega_{p,q} \to \mathbb{R}$ für gegebene $p, q \in M$ Geodäten sind (insbesondere also glatt).

Aufgabe 2.2 (Differentialoperatoren auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit)
Seien (M,g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, $f \in C^\infty(M)$ und $X, Y \in \Gamma^\infty(TM)$. Wir definieren $\operatorname{grad} f \in \Gamma^\infty(TM)$, $\operatorname{div}(X) \in C^\infty(M)$, $\Delta f \in C^\infty(M)$ und $\operatorname{Hess}(f) \in \Gamma^\infty(T^*M \otimes T^*M)$ durch

$$g(\operatorname{grad} f, X) := Df(X)\,, \quad \operatorname{div}(X) := \operatorname{tr}(Z \mapsto \nabla_Z X)\,,$$
$$\Delta f := \operatorname{div}(\operatorname{grad} f) \quad \text{und} \quad \operatorname{Hess}(f)(X,Y) := \nabla_X(Df(Y)) - Df(\nabla_X Y)$$

a) Bestimmen Sie die lokalen Koordinatendarstellungen dieser Ausdrücke.

b) Beweisen Sie die folgenden Identitäten:

(i) $\operatorname{grad}(fg) = f \operatorname{grad} g + g \operatorname{grad} f$

(ii) $\operatorname{div}(fX) = Df(X) + f \operatorname{div}(X)$

(iii) $\Delta(fg) = f\,\Delta g + g\,\Delta f + 2\langle \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} g\rangle$.

(iv) $\operatorname{Hess}(fg) = f \operatorname{Hess}(g) + g \operatorname{Hess}(f) + Df \otimes Dg + Dg \otimes Df$

Aufgabe 2.3 (Rechnen in Koordinaten)
Sei $\mathbb{R}P^2$ der zweidimensionale projektive Raum (Raum der Ursprungsgeraden in $\mathbb{R}^3$), zur Erinnerung:

$$\mathbb{R}P^2 = \big(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}\big)/\sim\,, \quad \text{wobei } x \sim y \;:\Longleftrightarrow\; \exists \lambda \in \mathbb{R} : x = \lambda y$$

und ein Atlas für $\mathbb{R}P^2$ ist zum Beispiel gegeben durch folgende drei Karten:

$$U_1 := \big\{[1,x_2,x_3] \in \mathbb{R}P^2\big\}\,, \quad \varphi_1([1,x_2,x_3]) = (x_2,x_3)\,,$$
$$U_2 := \big\{[x_1,1,x_3] \in \mathbb{R}P^2\big\}\,, \quad \varphi_2([x_1,1,x_3]) = (x_1,x_3)\,,$$
$$U_3 := \big\{[x_1,x_2,1] \in \mathbb{R}P^2\big\}\,, \quad \varphi_3([x_1,x_2,1]) = (x_1,x_2)\,.$$

Seien $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}P^2$ und ein Vektorfeld $X \in \Gamma^\infty(T\mathbb{R}^2)$ gegeben durch $F(x,y) := [x,y,1]$ und $X|_{(x,y)} := x\dfrac{\partial}{\partial y} - y\dfrac{\partial}{\partial x}$. Zeige, dass es ein Vektorfeld $Y \in \Gamma^\infty(T\mathbb{R}P^2)$ mit $D_pF(X|_p) = Y|_{F(p)}$ für alle $p \in \mathbb{R}^2$ gibt. Gib das Vektorfeld Y weiterhin bezüglich aller drei obigen Koordinatensysteme an.

Hinweis: F bildet in eine der drei Koordinatenumgebungen ab. Drücke $DF(X)$ zunächst bezüglich der dortigen Koordinatenvektorfelder aus und nutze das Ergebnis als Ausgangspunkt der Definition von Y.

Aufgabe 2.4 (Zum Satz von Hopf-Rinow)
Beweisen Sie die in der Vorlesung (dem Skript) ausgelassenen Beweisteile des *Satzes von Hopf-Rinow*, also die beiden Implikationen $(iii) \Longrightarrow (i)$ und $(i) \Longrightarrow (iv)$.