Aufgabenblatt 4

Abgabe am Montag 17.12.2018 vormittags
bei Wolfgang Maurer (F529)

Aufgabe 4.1 (Zweite Variation der Bogenlänge)
Seien $c : [a, b] \to M$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Geodäte und $\sigma : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [a, b] \to M$ eine stückweise glatte Variation von c mit möglichen Nichtdifferenzierbarkeitsstellen $a_1 < a_2 < \ldots < a_N$ in $[a, b]$. Seien weiter $V := (\partial_s\sigma)(0, \cdot)$ das Variationsvektorfeld und $A := (\nabla^{\sigma}_{\partial_s}\partial_s\sigma)(0, \cdot)$ die „transversale Beschleunigung“ von σ. Rechne nach, dass

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}\Big|_{s=0}\ell(\sigma_s) &= \int_a^b \Big[\big\langle \dot V^\perp(t), \dot V^\perp(t)\big\rangle - \big\langle R(V(t), \dot c(t))\dot c(t), V(t)\big\rangle\Big]\mathrm{d}t + \langle \dot c(t), A(t)\rangle\Big|_a^b \\
&= -\int_a^b \big\langle \ddot V^\perp(t) + R(V^\perp(t), \dot c(t))\dot c(t), V^\perp(t)\big\rangle \mathrm{d}t \\
&\quad - \sum_{i=1}^N \langle \Delta \dot V^\perp(a_i), V^\perp(a_i)\rangle + \langle \dot V^\perp(t), V^\perp(t)\rangle\Big|_a^b + \langle \dot c(t), A(t)\rangle\Big|_a^b
\end{aligned}$$

gilt, wobei $\Delta\dot V^\perp(a_i) := \dot V^\perp(a_i^+) - \dot V^\perp(a_i^-)$ die Differenz von rechts- und linksseitiger Ableitung bezeichne und für $t \in [a, b]$ und $v \in T_{c(t)}M$ mit $v^\perp$ der zu $\dot c(t)$ senkrechte Anteil gemeint ist.

Aufgabe 4.2 (Isometrien und lokale Isometrien)
Seien (M, g) und $(\overline{M}, \overline{g})$ zusammenhängende Riemannsche Mfk. Eine Abbildung $f : M \to \overline{M}$ heißt *(lokale) Isometrie*, falls f ein (lokaler) Diffeomorphismus ist und $f^*\overline{g} = g$ gilt.

a) Sei f eine lokale Isometrie. Drücke in geeigneten Koordinatensystemen die Koeffizienten von g durch die von $\overline{g}$ und f aus. Zeige weiter, dass $\nabla = \overline{\nabla}^f$ gilt (zurückgezogener Zusammenhang). Schließe daraus, dass f Geodäten auf Geodäten abbildet und dass $f^*\overline{R} = R$ gilt.

Tipp: Die Aussage über ∇ und $\overline{\nabla}$ kann man in Koordinaten nachrechnen oder bequemer beweisen, indem man die charakterisierenden Eigenschaften des Levi-Civita-Zusammenhangs nutzt.

b) Sei f eine Isometrie. Zeige, dass $\overline{d}(f(p), f(q)) = d(p, q)$ für alle $p, q \in M$ gilt. Zeige weiter, dass umgekehrt *jede* bijektive abstandserhaltende Abbildung von M nach $\overline{M}$ schon eine Isometrie ist. Folgere hieraus, dass ein gleichmäßiger Grenzwert von Isometrien wieder eine Isometrie ist (wobei die Gleimäßigkeit bezüglich $\overline{d}$ gemessen werden soll).

Hinweis: Um Glattheit in einem Punkt p zu zeigen, betrachte „Abstandskoordinaten“: Für geeignete $q_1, \ldots, q_n$ bilden die Funktionen $x^i := d(q_i, \cdot)$ ein lokales Koordinatensystem. (Wieso?)

c) Seien $\Phi, \Psi : M \to \overline{M}$ zwei lokale Isometrien. Für *ein* $p \in M$ gelte $\Phi(p) = \Psi(p)$ sowie $D_p\Phi = D_p\Psi$. Zeige, dass $\Phi = \Psi$ gilt. (*Hinweis:* Versuch es mit einem üblichen „Zusammenhangsargument“.)

Aufgabe 4.3 (Riccikrümmung und Schnittkrümmung)
Sei (M^n, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit.

a) Sei $p \in M$ und sei $e_1, \ldots, e_n \in T_pM$ eine Basis mit dualer Basis $\varepsilon^1, \ldots, \varepsilon^n \in T_p^*M$. Zeige, dass

$$\mathrm{Ric}(v, w) = \sum_{i=1}^n \varepsilon^i(R(e_i, v)w) \overset{\text{(Falls ONB)}}{=} \sum_{i=1}^n \langle R(e_i, v)w, e_i\rangle \qquad (*)$$

gilt. Schließe im ONB-Fall weiter, dass $\mathrm{Ric}(e_i, e_i) = \sum_{j\neq i} K(e_j, e_i)$ für alle $i = 1, \ldots, n$ gilt.

b) Beweise Lemma 2.22 (Bonnet-Myers-Singe) für den Fall, dass nur $\mathrm{Ric} \geq (n-1)\kappa g$ vorausgesetzt wird. Betrachte dazu mehrere Variationen ähnlich der im Beweis aus der Vorlesung und summiere die zugehörigen zweiten Variationen der Bogenlänge unter Beachtung von $(*)$.

Aufgabe 4.4 (Noch eine kleine Fingerübung im Koordinatenrechnen)
Sei $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ die 2-Sphäre und $U_N := S^2 \setminus \{(0,0,1)\}$, $U_S := S^2 \setminus \{(0,0,-1)\}$. Seien weiter $x : U_N \to \mathbb{R}^2$, $(u,v,w) \mapsto \dfrac{(u,v)}{1-w}$ sowie $y : U_S \to \mathbb{R}^2$, $(u,v,w) \mapsto \dfrac{(u,v)}{1+w}$ die stereographischen Projektionen vom Nord- bzw. Südpol. Zeige, dass sich $X : U_N \to TS^2$, $p \mapsto \dfrac{\partial}{\partial x^1}\Big|_p$ zu einem glatten Vektorfeld auf ganz S^2 fortsetzen lässt.