Riemannsche Geometrie

Jan-Hendrik Treude, Wolfgang Maurer
FB Mathematik & Statistik, Wintersemester 2018/19

Universität Konstanz

Aufgabenblatt 6

Abgabe am Montag 02.07.2018 bis 12 Uhr vormittags
bei Wolfgang Maurer (F529)

Aufgabe 6.1 (Beispiele für Untermannigfaltigkeit)
Betrachte die folgenden eingebetteten Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^3$:

- $P_1 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, z = x^2 + y^2\}$
- $P_2 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, z = x^2 - y^2\}$
- $P_3 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$
- $P_4 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, y^2 + y^2 = \cosh^2(z)\}$

Visualisiere die Flächen (z.B. mit einem Computer). Gib jeweils eine Einheitsnormale an und bestimme die zugehörige Weingartenabbildung und mittlere Krümmung. Bestimme anschließend die Schnittkrümmung von P.

Hinweis: Wegen $\dim P = 2$ ist die Schnittkrümmung einfach eine skalare Funktion (gleich der Gaußkrümmung).

Aufgabe 6.2 (Clifford Torus)
Sei $P := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \,:\, |x|^2 = \frac{1}{2} \text{ und } |y|^2 = \frac{1}{2}\right\} \subset \mathbb{R}^4$ der sogenannte *Clifford-Torus*. Durch

$$x(\theta,\varphi) := \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\theta, \sin\theta, \cos\varphi, \sin\varphi)$$

sind (für geeignete Definitionsbereiche) lokale Parametrisierungen von T gegeben.

a) Wieso ist P ein Torus?

Mache dir klar, dass durch

$$e_1 := (-\sin\theta, \cos\theta, 0, 0)\,, \quad e_2 := (0, 0, -\sin\varphi, \cos\varphi)\,,$$
$$\nu_1 := \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\theta, \sin\theta, \cos\varphi, \sin\varphi)\,, \quad \nu_2 := \frac{1}{\sqrt{2}}(-\cos\theta, -\sin\theta, \cos\varphi, \sin\varphi)$$

(globale) Orthonormalrahmen e_1, e_2 von TP bzw. ν_1, ν_2 von NP definiert werden.

Bestimme die Matrixdarstellung der Formoperatoren S_{ν_1} und S_{ν_2} bezüglich der Basis (e_1, e_2). Bestimme weiter die zugehörigen Hauptkrümmungen sowie den mittleren Krümmungsvektor.

b) Es gilt $P \subset S^3$. (Wieso?) Zeige, dass P eine *minimale Hyperfläche* in S^3 ist, d.h. mit mittlerer Krümmung identisch 0.

c) Berechne die Schnittkrümmungen von P einmal als Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^4$ und einmal als Untermannigfaltigkeit von S^3.

Aufgabe 6.3 (In Koordinaten rechnen)
Sei (M,g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und $P \subset M$ eine eingebettete Untermannigfaltigkeit. Seien $x^1, \ldots, x^n$ Koordinaten auf $U \subset M$ und $u^1, \ldots, u^k$ Koordinaten auf $U \cap P$. Seien $I\!I^\alpha_{ij} \in C^\infty(U \cap P)$ für $\alpha = 1, \ldots, n$ und $i,j = 1, \ldots, k$ definiert durch $I\!I(\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j}) =: I\!I^\alpha_{ij} \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$. Zeige:

$$-I\!I^\alpha_{ij} = \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial u^i \partial u^j} + {}^M\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \frac{\partial x^\beta}{\partial u^i} \frac{\partial x^\gamma}{\partial u^j} - {}^P\Gamma^k_{ij} \frac{\partial x^\alpha}{\partial u^k}\,,$$

wobei ${}^M\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ die Christoffelsymbole von (M,g) bzgl. der x^α und ${}^P\Gamma^k_{ij}$ die von (P,g) bzgl. der u^i sind.

Anmerkung: Für $\mathbb{R}^n$ und $x^1, \ldots, x^n$ euklidische Koordinaten fällt der mittlere Term heraus. Je nach Vorwissen ergibt sich dann eine bekannte Formel für die zweite Fundamentalform über die zweiten (kovarianten) Ableitungen des Einbettungsvektors.

Aufgabe 6.4 (Mittlere Krümmung von geodätischen Sphären in Modellräume)

a) Sei zunächst (M, g) eine allgemeine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit und seien $p \in M$, $c : \mathbb{R} \to M$ eine Geodäte mit $c(0) = p$ und $|\dot{c}| = 1$ und $b < \operatorname{inj}(p)$. Zeige:

- Es gibt $e_1, \dots, e_{n-1} \in \Gamma^\infty(c^*TM)$ orthonormal und orthogonal zu $\dot{c}$ mit $\nabla^c_{\partial_t} e_i = 0$.

Definiere nun $R^i_j \in C^\infty(\mathbb{R})$ und $S^i_j \in C^\infty((0, b))$ durch

$$S_{\dot{c}(t)}(e_i(t)) =: S^j_i(t) e_j(t) \quad \text{und} \quad R(e_i(t), \dot{c}(t))\dot{c}(t) =: R^j_i(t) e_j(t)\,,$$

wobei $S_{\dot{c}(t)}$ der Formoperator der geodätischen Sphäre $S(p, t)$ bezüglich der Normalen $\dot{c}(t)$ ist.

Zeige:

- $S = (S^i_j)$ und $R = (R^i_j)$ sind symmetrische $(n-1) \times (n-1)$ Matrizen.
- Es gilt $S^i_j(t) \sim \frac{1}{t}\delta^i_j$ für $t \to 0$.

  Hinweis: Beachte $\dot{c} = \operatorname{grad} r$ mit $r = d(p, \cdot)$. Wie sieht r in Normalkoordinaten aus? Wie lässt sich der Formoperator der Sphären über r ausdrücken?
- Es gilt die Riccati-Gleichung $S' + S^2 + R = 0$.

b) Sei nun $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ und $\kappa \in \mathbb{R}$ und sei M^n_κ der zugehörige Modellraum wie in Definition 2.10. Bestimme die Formoperatoren und die mittleren Krümmungen der geodätischen Sphären um einen beliebigen Punkt durch Lösen der Riccati-Gleichung.

Hinweis: Überlege zunächst, wieso es ausreicht, diagonale Lösungen der Riccati-Gleichung zu betrachten.