

Vorlesungsskript

Riemannsche Geometrie

Fachbereich Mathematik und Statistik, Universität Konstanz

Wintersemester 2018/19

Jan-Hendrik Treude

21. Februar 2019

Inhaltsverzeichnis

1. Längen, Abstände und Geodäten	5
1.1. Die metrische Struktur einer Riemannschen Mannigfaltigkeit	5
1.2. Erste Variation der Bogenlänge, Geodäten und Exponentialabbildung . .	6
1.3. Lokale Geometrie in einer Normalenumgebung	11
1.4. Vollständigkeit und der Satz von Hopf-Rinow	22
2. Jacobifelder und die zweite Variation der Bogenlänge	25
2.1. Jacobifelder und nochmal das Differential der Exponentialabbildung . . .	25
2.2. Konstante Krümmung und Modellräume I	28
2.3. Nichtpositive Schnittkrümmung und Überlagerungen	30
2.4. Zweite Variation der Bogenlänge, positive Krümmung und Kompaktheit .	33
2.5. Konstante Krümmung und Modellräume II	36
2.6. Der Schnitort: Wo Geodäten zu minimieren aufhören	37
3. Intermezzo: Extrinsische Geometrie von Untermannigfaltigkeiten	41
3.1. Tangential- und Normalenbündel	41
3.2. Die Zerlegung des Levi-Civita-Zusammenhangs	42
3.3. Die Zerlegung des Krümmungstensors	47
4. Vergleichsgeometrie	49
4.1. Vergleichssätze für die Riccati-Gleichung	49
4.2. Der Satz von Toponogov (Schnittkrümmungsvergleich)	55
4.3. Der Sphärensatz	66
A. Wiederholungen aus der Differentialgeometrie und Notationen	75
A.1. Differentialrechnung auf Mannigfaltigkeiten	75
A.2. Vektorbündel, Zusammenhänge, Krümmung	77
A.2.1. Was war nochmal ein Vektorbündel?	77
A.2.2. Was war nochmal ein Zusammenhang?	78
A.2.3. Die Krümmung eines Zusammenhangs	81
A.2.4. Zurückziehen von Vektorbündeln und Zusammenhängen	83

1. Längen, Abstände und Geodäten

1.1. Die metrische Struktur einer Riemannschen Mannigfaltigkeit

Es sei stets (M, g) eine zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit.

Definition 1.1. Eine *stückweise glatte Kurve* ist eine stetige Abbildung $c : [a, b] \rightarrow M$ mit der Eigenschaft, dass es eine Zerlegung $a = a_1 < a_2 < \dots < a_{k+1} = b$ gibt, sodass $c|_{[a_i, a_{i+1}]}$ glatt ist für jedes $i = 1, \dots, k$ ist. In diesem Fall ist die *(Bogen-)Länge* von c definiert durch

$$\ell(c) := \sum_{i=1}^k \int_{a_i}^{a_{i+1}} |\dot{c}(t)| dt. \quad (1.1)$$

Definition 1.2. Für $p, q \in M$ definieren wir den *Pfadraum*

$$\Omega_{p,q} := \{c : c \text{ ist stückweise glatte Kurve von } p \text{ nach } q\}. \quad (1.2)$$

Weiter definieren wir (beachte, dass $\Omega_{p,q} \neq \emptyset$, da M zusammenhängend ist)

$$d(p, q) := \inf_{c \in \Omega_{p,q}} \ell(c). \quad (1.3)$$

Beispiel 1.3. Im flachen euklidischen Raum \mathbb{R}^n minimieren Geraden die Bogenlänge, wie man für eine glatte Kurve einfach mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung sieht:

$$\int_a^b |\dot{c}(t)|_0 dt \geq \int_a^b \frac{\langle \dot{c}(t), c(0) - c(1) \rangle_0}{|c(0) - c(1)|_0} dt = \dots \text{(Hauptsatz)} = |c(0) - c(1)|_0.$$

Im Allgemeinen muss dagegen das Infimum in (1.3) überhaupt nicht angenommen werden, wie schon das einfache Beispiel $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ mit der euklidischen Metrik zeigt, siehe Abbildung 1.1.



Abbildung 1.1.: In $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ gibt es im Allgemeinen keine kürzesten Verbindenden.

1. Längen, Abstände und Geodäten

Satz 1.4. Die durch (1.3) definierte Funktion $d : M \times M \rightarrow [0, \infty)$ ist eine Metrik auf M und die von dieser Metrik induzierte Topologie stimmt mit der von M überein.

Beweis. Positivität und Symmetrie sind klar. Bezüglich der Transitivität seien $p, q, r \in M$ und $\varepsilon > 0$ gegeben. Wähle $c_1 \in \Omega_{p,q}$ und $c_2 \in \Omega_{q,r}$ mit $\ell(c_1) \leq d(p, q) - \varepsilon$ und $\ell(c_2) \leq d(q, r) - \varepsilon$. Sei $c \in \Omega_{p,r}$ die aus c_1 und c_2 zusammengesetzte Kurve, dann gilt:

$$d(p, r) \leq \ell(c) = \ell(c_1) + \ell(c_2) \leq d(p, q) + d(q, r) - 2\varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ sowie $p, q, r \in M$ beliebig waren, zeigt dies die Transitivität. Es bleibt zu zeigen, dass $d(p, q) \neq 0$ für alle $p, q \in M$ mit $p \neq q$ gilt. Seien dazu $p, q \in M$ mit $p \neq q$ gegeben. Wir müssen zeigen, dass Kurven von p nach q nicht beliebig kleine Länge haben können. Dazu machen wir einen lokalen Vergleich mit der euklidischen Geometrie:

Wähle eine Karte (U, x) um p mit $x(p) = 0$ und betrachte auf U die euklidische Metrik $g_0 = \delta_{ij} dx^i dx^j$. Wir indizieren alle zu g_0 gehörenden Größen mit einer 0. Wähle $\varepsilon > 0$ mit $B^0(p, 2\varepsilon) \subset U$ und setze

$$m := \min\{g_{ij}(x)v^i v^j : x \in \overline{B^0(p, \varepsilon)}, v \in \mathbb{R}^n, |v|_0^2 = 1\},$$

$$M := \max\{g_{ij}(x)v^i v^j : x \in \overline{B^0(p, \varepsilon)}, v \in \mathbb{R}^n, |v|_0^2 = 1\}.$$

Diese existieren aus Stetigkeits- und Kompaktheitsgründen und es gilt

$$m |v|_0^2 \leq g_{ij}(x)v^i v^j \leq M |v|_0^2 \quad (*)$$

für alle $x \in \overline{B^0(p, \varepsilon)}$ und alle $v \in \mathbb{R}^n$.

Indem wir $\varepsilon > 0$ eventuell nochmals verkleinern, dürfen wir von $q \notin B^0(p, \varepsilon)$ ausgehen. Sei nun $c \in \Omega_{p,q}$, definiert auf $[a, b]$. Dann gilt $\text{im}(c) \not\subset B^0(p, \varepsilon)$ und somit folgt $t_0 := \inf\{t \in [a, b] : c(t) \notin B^0(p, \varepsilon)\} \in (a, b)$. Mit (*) folgt:

$$\ell(c) \geq \ell(c|_{[a, t_0]}) \geq \sqrt{m} \ell(c|_{[a, t_0]}) \geq \sqrt{m} d_0(p, c(t_0)) = \sqrt{m} \varepsilon.$$

Hieraus folgt weiter $d(p, q) \geq \sqrt{m} \varepsilon > 0$.

Damit ist gezeigt, dass d eine Metrik ist. Dass die von d induzierte Topologie auf M gleich der gegebenen Topologie von M ist, kann man sich überlegen, indem man mittels (*) die Metrik d beidseitig durch d_0 abschätzt. Dies sei als Übung überlassen.

Wenig überraschend findet man $\sqrt{m}d_0(p, q) \leq d(p, q) \leq \sqrt{M}d_0(p, q)$ für alle $q \in B^0(p, \varepsilon)$.

□

1.2. Erste Variation der Bogenlänge, Geodäten und Exponentialabbildung

Wir untersuchen, wie sich die Bogenlänge unter „lokalen Deformationen“ einer Kurve im folgenden Sinne verändert: Zu einer stückweise glatten Kurve $c : [a, b] \rightarrow M$ betrachten wir stetige Abbildungen $\sigma : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [a, b] \rightarrow M$, $(s, t) \mapsto \sigma_s(t) := \sigma(s, t)$ mit $\sigma_0 = c$. Die Abbildung $s \mapsto \sigma_s$ ist dann eine Kurve im Raum der stetigen Kurven in M , die durch c

1.2. Erste Variation der Bogenlänge, Geodäten und Exponentialabbildung

verläuft. Zusätzlich werden wir verlangen, dass es eine Zerlegung $a = a_1 < \dots < a_{k+1} = b$ gibt, sodass $\sigma|_{(-\varepsilon, \varepsilon) \times [a_i, a_{i+1}]}$ für alle $i = 1, \dots, k$ glatt ist. Man spricht dann von einer *stückweise glatten Variation von c* . Für eine solche sind insbesondere die Abbildungen $s \mapsto \sigma(s, t)$ mit festem t glatt und wir können eine Abbildung $V : [a, b] \rightarrow TM$ durch

$$V(t) := \frac{\partial \sigma}{\partial s}(0, t) := \left(D_{(0, t)} \sigma \right) \left(\frac{\partial}{\partial s} \Big|_{(0, t)} \right) \quad (1.4)$$

definieren. Diese wird *Variationsvektorfeld* von σ genannt und ist ein Vektorfeld längs der Kurve c , d.h. $V \in \Gamma^\infty(c^*TM)$.¹ Allgemeiner können wir σ in jedem Punkt, wo σ differenzierbar ist, nach jeder der beiden Variablen ableiten. Dafür verwenden wir die Notation

$$\dot{\sigma} := \partial_t \sigma := D\sigma(\partial_t) \quad \text{und} \quad \sigma' := \partial_s \sigma := D\sigma(\partial_s), \quad (1.5)$$

Die beiden Abbildungen $\dot{\sigma}$ und σ' sind (auf glatten Teilen) Vektorfelder längs σ .

Beachte schließlich noch, dass für eine stückweise glatte Kurve $c : [a, b] \rightarrow M$ in *jedem* Punkt $t \in (a, b)$ die einseitigen Ableitungen $\dot{c}(t^-)$ und $\dot{c}(t^+)$ als Ableitungen der beiden (glatten) Einschränkungen $c|_{[t-\varepsilon, t]}$ bzw. $c|_{[t, t+\varepsilon]}$ für $\varepsilon > 0$ hinreichen klein definiert sind. Die beiden stimmen genau dann überein, wenn c in t differenzierbar ist.

Satz 1.5 (Erste Variation der Bogenlänge). *Sei $\sigma : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [a, b] \rightarrow M$, $(s, t) \mapsto \sigma_s(t)$ stetig und $a = a_1 < \dots < a_{k+1} = b$, sodass $\sigma|_{(-\varepsilon, \varepsilon) \times [a_i, a_{i+1}]}$ für alle $i = 1, \dots, k$ glatt ist. Sei weiter angenommen, dass $c := \sigma_0$ nach Bogenlänge parametrisiert ist. Dann gilt*

$$\frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \ell(\sigma_s) = - \sum_{i=1}^k \int_{a_i}^{a_{i+1}} \langle V(t), \ddot{c}(t) \rangle dt - \sum_{i=2}^k \langle V(a_i), \dot{c}(a_i^+) - \dot{c}(a_i^-) \rangle + \langle V(t), \dot{c}(t) \rangle \Big|_a^b. \quad (1.6)$$

wobei $V := \partial_s \sigma|_{s=0}$ und $\ddot{c} := \nabla_{\partial_t}^c \dot{c}$.

Beweis. Für jedes $i = 1, \dots, k$ gilt:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \int_{a_i}^{a_{i+1}} |\dot{\sigma}| dt &= \frac{d}{ds} \int_{a_i}^{a_{i+1}} \langle \dot{\sigma}, \dot{\sigma} \rangle^{\frac{1}{2}} dt \\ &= \int_{a_i}^{a_{i+1}} \frac{1}{2} \langle \dot{\sigma}, \dot{\sigma} \rangle^{-\frac{1}{2}} \partial_s \langle \dot{\sigma}, \dot{\sigma} \rangle dt \\ &= \int_{a_i}^{a_{i+1}} \langle \dot{\sigma}, \dot{\sigma} \rangle^{-\frac{1}{2}} \langle \nabla_{\partial_s}^\sigma \dot{\sigma}, \dot{\sigma} \rangle dt \\ &= \int_{a_i}^{a_{i+1}} \langle \dot{\sigma}, \dot{\sigma} \rangle^{-\frac{1}{2}} \langle \nabla_{\partial_t}^\sigma \sigma', \dot{\sigma} \rangle dt. \end{aligned}$$

Setzen wir nun $s = 0$, so wird das Skalarprodukt zu 1, da $c = \sigma_0$ nach Voraussetzung nach Bogenlänge parametrisiert ist. Im zweiten Skalarprodukt entsteht das Variations-

¹Strikt gesprochen natürlich nur alle Einschränkungen auf Stücke, wo σ (und damit auch c und V) glatt sind. Wir erlauben uns diese kleine Ungenauigkeit in der Notation ...

1. Längen, Abstände und Geodäten

Vektorfeld $V = \partial_s \sigma(0, \cdot)$. Damit rechnen wir weiter:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \int_{a_i}^{a_{i+1}} |\dot{\sigma}| dt &= \int_{a_i}^{a_{i+1}} \langle \nabla_{\partial_t}^c V, \dot{c} \rangle dt \\ &= \int_{a_i}^{a_{i+1}} \left(\partial_t \langle V, \dot{c} \rangle - \langle V, \nabla_{\partial_t}^c \dot{c} \rangle \right) dt \\ &= \langle V(a_{i+1}), \dot{c}(a_{i+1}^-) \rangle - \langle V(a_i), \dot{c}(a_i^+) \rangle - \int_{a_i}^{a_{i+1}} \langle V, \ddot{c} \rangle dt. \end{aligned}$$

Aufsummieren über $i = 1, \dots, k$ liefert die Behauptung. \square

Jeder der drei Terme auf der rechten Seite von (1.6) hat eine anschauliche Bedeutung:

- Der erste Term zeigt, dass man die Länge von c verkürzen kann, wenn man sie in Richtung ihrer Krümmung \ddot{c} deformiert.
- Der zweite Term zeigt, dass man die Länge von c verkürzen kann, wenn man sie in einem Knickpunkt in das „Innere“ des von $\dot{c}(a_i^+)$ und $\dot{c}(a_i^-)$ aufgespannten Winkels deformiert. (Skizze!)
- Der letzte Term zeigt, dass man die Länge von c verkürzen kann, wenn man den Anfangspunkt in Richtung der „Anfangsgeschwindigkeit“ oder den Zielpunkt entgegengesetzt der „Endgeschwindigkeit“ verschiebt.

Wir werden später zeigen, dass man zu einer gegebenen Kurve und einem gegebenem Vektorfeld V längs dieser stets eine Variation konstruieren kann, deren Variationsvektorfeld genau V ist. Daraus wird folgen, dass für kritische Punkte von ℓ (bei festgehaltenen Endpunkten) die ersten beiden Terme verschwinden müssen. Insbesondere muss die Kurve also differenzierbar sein und $\ddot{c} = 0$ erfüllen. Mit dieser Differentialgleichung beschäftigen wir und uns nun genauer.

Definition 1.6. Eine glatte Kurve $c : I \rightarrow M$ mit $\ddot{c} = \nabla_{\partial_t}^c \dot{c} \stackrel{!}{=} 0$ heißt *Geodäte*.

Ende der
ersten

Lemma 1.7. Ist $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $c : I \rightarrow M$ eine Geodäte, so ist $|\dot{c}|$ konstant.
Vorlesung(22.10.)

Beweis. Aufgrund der Metrizität (A.33) des Levi-Civita-Zusammenhangs längs c gilt

$$\frac{d}{dt} |\dot{c}|^2 = \frac{d}{dt} \langle \dot{c}, \dot{c} \rangle = 2 \langle \nabla_{\partial_t}^c \dot{c}, \dot{c} \rangle = 0.$$

\square

Aus der lokalen Formel (A.30) für den zurückgezogenen Zusammenhang ∇^c folgt: Sind (U, x) lokale Koordinaten, dann lautet die Geodätengleichung für eine glatte Kurve $c : I \rightarrow U$ mit $c^i := x^i \circ c$ in diesen Koordinaten

$$\ddot{c}^k(t) + \Gamma_{ij}^k(c(t)) \dot{c}^i(t) \dot{c}^j(t) = 0 \quad (\text{für alle } k = 1, \dots, n) \quad (1.7)$$

1.2. Erste Variation der Bogenlänge, Geodäten und Exponentialabbildung

Dies ist eine (nichtlineare) gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung mit glatten Koeffizienten, auf die sich die üblichen Existenz- und Eindeutigkeitsresultate anwenden lassen. Aufgrund der Eindeutigkeit lassen sich lokal in Karten konstruierte Lösungen zusammenkleben, ähnlich wie man dies für Integralkurven von Vektorfeldern kennt. Der folgende Satz fasst einige wichtige dieser Aussagen zusammen.

Satz 1.8 (Existenz und Eindeutigkeitsaussagen für Geodäten).

- (i) Zu $v \in TM$ existiert eine eindeutige maximale Geodäte $c_v : I_v \rightarrow M$ mit $\dot{c}_v(0) = v$.
- (ii) Die Menge $\mathcal{U} := \{(v, t) \in TM \times \mathbb{R} : v \in TM, t \in I_v\} \subset TM \times \mathbb{R}$ ist offen und die Abbildung $\Phi : \mathcal{U} \rightarrow M$, $\Phi(v, t) := c_v(t)$ ist glatt.
- (iii) Für jedes $\mathcal{K} \subset TM$ kompakt existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $(-\varepsilon, \varepsilon) \subset I_v$ für alle $v \in \mathcal{K}$.
- (iv) Sei $v \in TM$ mit $[a, b] \subset I_v$. Dann existiert eine offene Umgebung $\mathcal{V} \subset TM$ von v mit $[a, b] \subset I_w$ für alle $w \in \mathcal{V}$.
- (v) (Homogenität von Geodäten) Sei $v \in TM$ und $\varepsilon > 0$ mit $(-\varepsilon, \varepsilon) \subset I_v$. Sei $a > 0$. Dann gilt $(-\frac{\varepsilon}{a}, \frac{\varepsilon}{a}) \subseteq I_{av}$ und $c_v(at) = c_{av}(t)$ für jedes $t \in (-\frac{\varepsilon}{a}, \frac{\varepsilon}{a})$.
- (vi) Für jedes $v \in TM$ gilt: Ist I_v nach oben (unten) beschränkt, so existiert zu jeder kompakten Menge $K \subset M$ ein $\hat{t} \in I_v$ mit $c(t) \notin K$ für alle $t > \hat{t}$ ($t < \hat{t}$).

(Beachte, dass die Geodätengleichung von zweiter Ordnung ist.)

Beweis. Zu (i) - (iv): Diese Aussagen folgen analog wie bei Integralkurven von Vektorfeldern (vgl. Kapitel 20 in [8]), indem man die entsprechenden Aussagen aus der Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen mit einfachen „Verklebeargumenten“ kombiniert (siehe auch die anschließende Bemerkung). Zur Illustration zeigen wir (iv):

Wegen (iii) und der Kompaktheit von $\dot{c}_v([a, b]) \subset TM$ existiert eine Zerlegung $a = b_1 < b_2 < \dots < b_{k+1} = b$ und offene Umgebungen $\mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_{k+1} \subset TM$ von $\dot{c}_v(b_1), \dots, \dot{c}_v(b_{k+1})$, sodass gilt: $[0, b_{i+1} - b_i] \subset I_w$ für alle $w \in \mathcal{U}_i$ und alle $i = 1, \dots, k$.

Aufgrund der Wahl von \mathcal{U}_1 gilt $[a, b_1] \subset I_w$ für jedes $w \in \mathcal{U}_1$. Da der Fluss Φ aus (ii) stetig ist, existiert eine offene Umgebung $\mathcal{V}_1 \subset \mathcal{U}_1$ von v , sodass $\dot{c}_w(b_1) = \Phi(w, b_1) \in \mathcal{U}_2$ für alle $w \in \mathcal{V}_1$ gilt.

Aufgrund der Wahl von \mathcal{U}_2 gilt dann $[a, b_2] \subset I_w$ für jedes $w \in \mathcal{V}_1$. Wieder aufgrund der Stetigkeit von Φ existiert eine weitere offene Umgebung $\mathcal{V}_2 \subset \mathcal{V}_1$ von v , sodass $\dot{c}_w(b_2) = \Phi(w, b_2) \in \mathcal{U}_3$ für alle $w \in \mathcal{V}_2$ gilt.

Dies wiederholen wir, bis wir schließlich eine offene Umgebung $\mathcal{V} := \mathcal{V}_k$ von v gefunden haben, mit $[a, b] = [a, b_{k+1}] \subset I_w$ für alle $w \in \mathcal{V}$.

Zu (v) Für $t \in (-\frac{\varepsilon}{a}, \frac{\varepsilon}{a})$ setze $c(t) := c_v(at)$. In lokalen Koordinaten (x^i) um $c(0)$ gilt

$$\ddot{c}^k(t) + \Gamma_{ij}^k(c(t))\dot{c}^i(t)\dot{c}^j(t) = a^2[\ddot{c}_v^k(at) + \Gamma_{ij}^k(c_v(at))\dot{c}_v^i(at)\dot{c}_v^j(at)] = 0$$

sowie $\dot{c}(0) = a\dot{c}_v(0) = av$. Also löst c dieselbe Gleichung wie c_{av} , woraus (vi) folgt.

Zu (vi): Wegen Lemma 1.7 und (v) dürfen wir ohne Einschränkung annehmen, dass $|\dot{c}_v| = |v| = 1$ gilt. Sei $I_v = (a, b)$ mit $b < \infty$ und sei $K \subset M$ kompakt. Angenommen

1. Längen, Abstände und Geodäten

es gilt $c_v(I_v) \subset K$. Dann existiert eine Folge $(t_k)_k$ in I_v mit $t_k \rightarrow b$ und $c(t_k) \rightarrow p \in K$. Wegen $|\dot{c}_v| = 1$ konvergiert auch eine Teilfolge von $(\dot{c}_v(t_k))_k$, ohne Einschränkung gelte $\dot{c}_v(t_k) \rightarrow w \in T_p M$ (wenn man ganz genau sein will, wähle man Koordinaten um p und betrachte $\dot{c}_v(t_k)$ in den zugehörigen Koordinaten von TM). Wähle² nun $\varepsilon > 0$ mit $[-\varepsilon, \varepsilon] \subset I_w$ und wähle mit (iv) eine Umgebung $\mathcal{V} \subseteq TM$ von w mit $[-\varepsilon, \varepsilon] \subset I_z$ für alle $z \in \mathcal{V}$. Wähle $k \in \mathbb{N}$ hinreichend groß, sodass $\dot{c}_v(t_k) \in \mathcal{V}$ und $t_k - b < \frac{\varepsilon}{3}$ gelten, und setze $z := \dot{c}_v(t_k)$. Für die Geodäte $c_z : I_z \rightarrow M$ gilt dann $[-\varepsilon, \varepsilon] \subset I_z$ wegen $z \in \mathcal{V}$. Wegen der eindeutigen Lösbarkeit der Geodätengleichung gilt aber auch $c_z(t - t_k) = c_v(t)$ für (zumindest) alle $t \in [t_k, b)$. Wegen $b - t_k < \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon$ liefert dann aber c_z eine Fortsetzung von c_v über b hinaus. Dies ist ein Widerspruch zur Maximalität von I_v (bzw. b), also kann nicht $b < \infty$ gelten. \square

Bemerkung 1.9. Man kann die Ergebnisse für Integralkurven von Vektorfeldern sogar direkt auf Geodäten übertragen, indem man sich bewusst macht, dass es ein Vektorfeld $\mathcal{G} \in \Gamma^\infty(TTM)$ auf TM gibt, dessen Integralkurven genau den Ableitungen von Geodäten entsprechen, d.h. eine Kurve $c : I \rightarrow M$ ist genau dann eine Geodäte wenn $\dot{c} : I \rightarrow TM$ eine Integralkurve von \mathcal{G} ist. In lokalen Koordinaten (x^i) auf M und zugehörigen Koordinaten (x^i, v^j) auf TM ist dieses Vektorfeld durch

$$\mathcal{G} = v^i \frac{\partial}{\partial x^i} - \Gamma_{ij}^k v^i v^j \frac{\partial}{\partial v^k}.$$

gegeben. Man nennt \mathcal{G} *geodätisches Vektorfeld* von (M, g) .

Korollar 1.10 (Kompakte Mfk. sind geodätisch vollständig). *Ist M kompakt, so ist jede Geodäte für alle Zeiten definiert, d.h. es gilt $I_v = \mathbb{R}$ für alle $v \in TM$.*

Korollar 1.11. *Die Menge $\mathcal{D} := \{v \in TM : 1 \in I_v\} \subset TM$ ist offen und für jedes $p \in M$ ist die Menge $\mathcal{D}_p := \mathcal{D} \cap T_p M \subset T_p M$ eine sternförmige Umgebung von $0_p \in T_p M$.*

Definition 1.12. Seien $\mathcal{D} := \{v \in TM : 1 \in I_v\} \subset TM$ und $\mathcal{D}_p := \mathcal{D} \cap T_p M \subset T_p M$ für $p \in M$ wie in Korollar 1.11. Die Abbildung $\exp : \mathcal{D} \rightarrow M$, $\exp(v) := c_v(1)$ heißt *Exponentialabbildung* und $\exp_p := \exp|_{\mathcal{D}_p}$ heißt *Exponentialabbildung in p* .

Da die Exponentialabbildung einfach die Einschränkung des geodätischen Flusses ist (genauer der „Zeit-1-Fluss“), ist sie glatt. Ebenso ist die Exponentialabbildung bei p für jedes $p \in M$ glatt. Aus der Homogenität von Geodäten folgt, dass sich *jede* Geodäte über die Exponentialabbildung ausdrücken lässt und die Exponentialabbildung Ursprungsgeraden in $T_p M$ auf Geodäten durch p abbildet.

Korollar 1.13. *Sei $v \in T_p M$ und $t \in I_v$. Dann gilt $1 \in I_{tv}$ und $c_v(t) = \exp_p(tv)$.*

²Es folgt nun vermutlich ein Standardargument aus der Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen.

1.3. Lokale Geometrie in einer Normalenumgebung

Für die folgende Überlegung identifizieren wir $T_v T_p M$ mit $T_p M$, wie üblich für eine Mannigfaltigkeit, die selbst schon ein Vektorraum ist. Konkret geht dies, indem man einen Vektor $w \in T_p M$ als den von der Kurve $t \mapsto v + tw$ definierten Tangentialvektor in $T_v T_p M$ auffasst.

Satz 1.14. *Sei $p \in M$. Es gilt $D_0 \exp_p = \text{id}_{T_p M}$. Folglich ist \exp_p ein Diffeomorphismus zwischen geeigneten offenen Umgebungen von $0_p \in T_p M$ und von $p \in M$.*

Beweis. Für $v \in T_p M$ gilt:

$$(D_0 \exp_p)(v) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \exp_p(tv) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} c_v(t) = v.$$

Die zweite Aussage folgt aus der ersten und dem Satz über lokale Umkehrbarkeit. \square

Mit der Exponentialabbildungen lassen sich folglich unter anderem Koordinaten von $T_p M$ nach M übertragen, in denen dann die lokale Geometrie von M nahe p mit der Geometrie des euklidischen Vektorraums $T_p M$ verglichen werden kann.

Definition 1.15 (Normalenumgebung und Normalkoordinaten). Sei $p \in M$ und sei $V \subset T_p M$ eine sternförmige offene Umgebung von 0_p , auf der \exp_p ein Diffeomorphismus ist. Dann nennt man $U := \exp_p(V) \subset M$ *Normalenumgebung von p* . Ist weiter (e_1, \dots, e_n) eine Orthonormalbasis von $T_p M$ mit dualer Basis $(\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n)$, so nennt man die durch

$$x^i := \varepsilon^i \circ (\exp_p|_V)^{-1} \tag{1.8}$$

definierten Koordinaten auf U *Normalkoordinaten um p* .

Beachte:

- Auf einer Normalenumgebung gibt es viele verschiedene Normalkoordinatensysteme, je eines für jede Orthonormalbasis von $T_p M$. Je zwei Normalkoordinatensysteme hängen durch eine (feste) orthogonale Transformation zusammen.
- Ist U eine Normalenumgebung mit Normalkoordinaten x und zugehöriger Orthonormalbasis (e_1, \dots, e_n) von $T_p M$, so gelten:

$$\forall q \in U : (\exp_p|_U)^{-1}(q) = x^i(q)e_i \quad \text{und} \quad x^j(\exp_p(v^i e_i)) = v^j. \tag{1.9}$$

Zweites besagt, dass die Koordinatendarstellung der Exponentialabbildung bezüglich der durch (e_1, \dots, e_n) auf $T_p M$ induzierten Koordinaten und der Normalkoordinaten (x^1, \dots, x^n) auf $U \subset M$ gerade die Identität ist.

- Von zwei Normalenumgebungen muss *nicht* notwendigerweise eine in der anderen enthalten sein, vgl. Abbildung 1.2. Ebenso gibt es im Allgemeinen auch *keine* „größte Normalenumgebung“, die alle anderen enthält. Wir werden später spezielle Normalenumgebungen betrachten (z.B. geodätische Bälle), von denen es eine maximale solche Normalenumgebung geben wird. Aber auch diese muss dann nicht *jede beliebige* andere Normalenumgebung enthalten.

1. Längen, Abstände und Geodäten



Abbildung 1.2.: Zwei Normalenumgebungen um den Nordpol auf S^1 , von denen keine in der anderen enthalten ist. Diese zeigen auch, dass die eindeutige Geodäte vom Nordpol zu einem Punkt in einer gegebenen Normalenumgebung, die innerhalb der Normalenumgebung verläuft, von der Normalenumgebung abhängt.

Im Folgenden werden wir bei gegebener Normalenumgebung U von p und zugehöriger sternförmiger Umgebung $V \subset T_p M$ von 0_p stets einfach \exp_p^{-1} für $(\exp_p|_V)^{-1}$ schreiben.

Erinnerung: Tangentialräume an einen Vektorraum Wir werden häufig die Ableitung der Exponentialabbildung $\exp_p : \mathcal{D}_p \subset T_p M \rightarrow M$ berechnen (meist nur in Normalenumgebungen). Per Definition ist diese zunächst eine lineare Abbildung $D \exp_p : T\mathcal{D}_p \rightarrow TM$ bzw. für festes $v \in T_p M$ und $q := \exp_p(v) \in M$ eine Abbildung $D_v \exp_p : T_v T_p M \rightarrow T_q M$. Da $T_p M$ ein *Vektorraum* ist, lässt sich $T_v T_p M$ „kanonisch“ mit $T_p M$ wie folgt identifizieren (je nach Sichtweise/Definition von Tangentialvektoren):

$$\underbrace{T_p M \ni [\gamma]}_{\substack{\text{Äquivalenzklasse} \\ \text{von Kurven}}} \mapsto [t \mapsto v + \gamma(t)] \in T_v T_p M,$$

bzw. $\underbrace{T_p M \ni v}_{\text{Derivation in } p} \mapsto [f \mapsto \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} f(v + t\gamma(t))] \in T_v T_p M,$

wobei in der zweiten Zeile $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ eine glatte Kurve mit $\dot{\gamma}(0) = v$ ist. Für unsere Zwecke ist vor allem wichtig, was dies für die Ableitungen von Funktionen konkret bedeutet: Für $v \in T_p M$ und $w \in T_p M \cong T_v T_p M$ ³ und eine glatte Funktion $F : T_p M \rightarrow N$ gilt dann nämlich

$$D_v F(w) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} F(v + tw),$$

³Das w wird also aus $T_p M$ geholt, soll aber wie oben erklärt als Vektor in $T_v T_p M$ verstanden werden.

1.3. Lokale Geometrie in einer Normalenumgebung

denn $t \mapsto v + tw$ ist eine glatte Kurve durch v mit Ableitung w .

Satz 1.16 (Radiale Geodäten und Metrik in Normalkoordinaten). *Sei (U, x) ein Normalkoordinatensystem um $p \in M$. Dann gelten:*

(i) *Eine glatte Kurve $c : I \rightarrow U$ mit $c(0) = p$ ist genau dann eine Geodäte, wenn es $a \in \mathbb{R}^n$ gibt mit $c^i(t) := x^i(c(t)) = a^i t$.⁴*

(ii) *Für alle $i, j, k = 1, \dots, n$ gelten*

$$g_{ij}(p) = \delta_{ij}, \quad \partial_k g_{ij}(p) = 0, \quad \Gamma_{ij}^k(p) = 0. \quad (1.10)$$

Beweis. (i) Das folgt direkt aus Korollar 1.13.

Zu (ii): Wegen (1.9) bzw. der Erklärung darunter gilt $\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_q = D_{\exp_p^{-1}(q)} \exp_p(e_i)$ für jedes $q \in U$ und alle $i = 1, \dots, n$ (wobei hier $e_i \in T_p M$ als Vektor in $T_{\exp_p^{-1}(q)} T_p M$ aufgefasst werden sollte, wie zuvor erklärt). Wegen $D_0 \exp_p^{-1} = \text{id}_{T_p M}$ folgt

$$g_{ij}(p) = \langle \partial_i|_p, \partial_j|_p \rangle = \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}.$$

Dass $\Gamma_{ij}^k(p) = 0$ gilt, folgt direkt aus der lokalen Form der Geodätengleichung und der Tatsache, dass Geodäten durch p in Normalkoordinaten lineare Funktionen sind. Das Verschwinden der ersten Ableitungen der Metrik in p folgt hieraus wegen

$$\partial_k g_{ij} = \partial_k \langle \partial_i, \partial_j \rangle = \langle \nabla_{\partial_k} \partial_i, \partial_j \rangle + \langle \partial_i, \nabla_{\partial_k} \partial_j \rangle = \left\langle \Gamma_{ki}^\ell \partial_\ell, \partial_j \right\rangle + \left\langle \partial_i, \Gamma_{kj}^\ell \partial_\ell \right\rangle.$$

Im Punkte p verschwindet dies. □

Aus dem letzten Satz folgt, dass sich jeder Punkt in einer Normalenumgebung U von p durch eine eindeutige in U liegende radiale Geodäte mit p verbinden lässt. Diese kann jedoch von der Normalenumgebung abhängen, vergleiche Abbildung 1.2. Wir führen nun „symmetrischere“ Normalenumgebungen ein, in denen dies nicht mehr der Fall ist.

Definition 1.17. Sei (U, x) ein Normalkoordinatensystem von $p \in M$. Die Funktion

$$r := |\exp_p^{-1}(\cdot)| = \sqrt{(x^1)^2 + \dots + (x^n)^2} \in C(U) \cap C^\infty(U \setminus \{p\}) \quad (1.11)$$

wird *radiale Abstandsfunktion zu p* genannt. Für jedes $R > 0$, für welches der Abschluss von

$$\mathcal{B}(p, R) := \{q \in U : r(q) < R\} = \exp_p(\{v \in T_p M : |v| < R\}) \quad (1.12)$$

in U enthalten ist, nennen wir $\mathcal{B}(p, R)$ einen *geodätischen Ball* und

$$\mathcal{S}(p, R) := \{q \in U : r(q) = R\} = \exp_p(\{v \in T_p M : |v| = R\}) \quad (1.13)$$

eine *geodätische Sphäre*.

⁴Solche sogenannten *radialen Geodäten* sind also in Normalkoordinaten durch lineare Funktionen („Geraden“) dargestellt. Für Geodäten, die nicht durch p verlaufen, muss dies nicht gelten.

1. Längen, Abstände und Geodäten

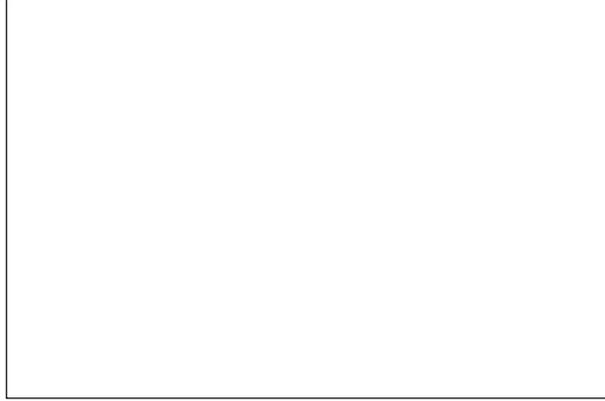


Abbildung 1.3.: Geodätische Sphären und das radiale Einheitsvektorfeld auf einem geodätischen Ball.

Wir haben hier bewusst ein geschwungenes \mathcal{B} und \mathcal{S} gewählt, um die hier definierten geodätischen Bälle und sphären zunächst von denen bezüglich der durch (1.3) definierten Metrik d zu unterscheiden. Unser nächstes Ziel ist aber, zu zeigen, dass dies letztendlich unnötig ist und $r = d(p, \cdot)$ innerhalb eines geodätischen Balls gilt.

Beachte weiter, dass die radiale Abstandsfunktion und damit auch die geodätischen Bälle und Sphären nicht von der Wahl der Normalkoordinaten abhängt und insbesondere die zweite Gleichheit in (1.11) in beliebigen Normalkoordinaten gilt.

Da \exp_p (um 0_p herum) ein Diffeomorphismus ist, sind geodätische Sphären glatte Untermannigfaltigkeiten von M und diffeomorph zu S^{n-1} und ein (punktierter) geodätischer Ball wird durch die darin liegenden geodätischen Sphären „geblättert“. Sei genauer

$$S_p := \{v \in T_p M : |v| = 1\} \subset T_p M \quad (1.14)$$

die Einheitssphäre in $T_p M$, dann ist die Abbildung

$$\Phi : (0, R) \times S_p \rightarrow \mathcal{B}(p, R) \setminus \{p\}, \quad \Phi(\lambda, v) := \exp_p(\lambda v) \quad (1.15)$$

ein Diffeomorphismus. Beachte, dass $\Phi(\{\varepsilon\} \times S_p) = \mathcal{S}(p, \varepsilon)$ gerade eine geodätische Sphäre ist und somit $\mathcal{B}(p, R) \setminus \{p\}$ durch Φ in geodätische Sphären „geblättert“ wird. Mittels Φ definieren wir nun das *radiale Einheitsvektorfeld*

$$\frac{\partial}{\partial r} := D\Phi \left(\frac{\partial}{\partial \lambda} \right), \quad (1.16)$$

wobei das Vektorfeld $\frac{\partial}{\partial \lambda}$ auf $(0, R) \times S_p$ durch $\frac{\partial}{\partial \lambda} \Big|_{(\lambda_0, \omega_0)} [t \mapsto (\lambda_0 + t, \omega_0)]$ gegeben ist.

Lemma 1.18. *Sei $p \in M$ und sei x Normalkoordinaten auf $\mathcal{B}(p, R)$. Dann gilt*

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{x^i}{r} \frac{\partial}{\partial x^i}. \quad (1.17)$$

1.3. Lokale Geometrie in einer Normalenumgebung

Weiter ist $\frac{\partial}{\partial r}|_q$ für jedes $q \in \mathcal{B}(p, R)$ gleich der Geschwindigkeit der nach Bogenlänge parametrisierten radialen Geodäte von p nach q und hat also insbesondere Einheitslänge.

Beweis. (War Übungsaufgabe 1.1) Sei $q \in \mathcal{B}(p, r)$, $q \neq p$. Setze $v := \exp_p^{-1}(q)$, dann gelten $v = x^i(q)e_i$ und $|v| = r(q)$ und somit ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r}|_q &= \frac{d}{d\lambda}\Big|_{\lambda=|v|} \Phi\left(\lambda, \frac{v}{|v|}\right) = \frac{d}{d\lambda}\Big|_{\lambda=r(q)} \exp_p\left(\lambda \frac{x^i(q)e_i}{r(q)}\right) \\ &= D_v \exp_p\left(\frac{x^i(q)}{r(q)}e_i\right) = \frac{x^i(q)}{r(q)} D_v \exp_p(e_i) = \frac{x^i(q)}{r(q)} \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_q. \end{aligned}$$

Die zweite Behauptung folgt mittels einfachem Ableiten hieraus sowie aus der Tatsache, dass diese Geodäte durch $t \mapsto \exp_p(t\frac{v}{|v|})$ gegeben ist. \square

Im flachen Raum steht das radiale Einheitsvektorfeld senkrecht auf den (geodätischen) Sphären. Wir zeigen nun, dass dies auch allgemein gilt, woraus anschließend folgen wird, dass kurze Geodäten die Bogenlänge minimieren und $r = d(p, \cdot)$ gilt.

Ende der
zweiten
Vorlesung
(29.10.)

Satz 1.19 (Gauß-Lemma). *In einem geodätischen Ball um $p \in M$ gelten:*

- (i) $\langle D_v \exp_p(v), D_v \exp_p(w) \rangle = \langle v, w \rangle$ für alle $v \in \mathcal{D}_p$ und $w \in T_p M$.⁵
- (ii) In Normalkoordinaten gilt $g_{ij}x^i = \delta_{ij}x^i$ für alle $j = 1, \dots, n$.
- (iii) $\text{grad } r = \frac{\partial}{\partial r}$
- (iv) $\frac{\partial}{\partial r}$ steht senkrecht auf den geodätischen Sphären und hat Länge 1.

Beweis. Zu (i): Die Ableitung von \exp_p berechnen wir mit einem Trick, den wir noch häufiger verwenden werden. Betrachte dazu für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ die Abbildung

$$\sigma : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [0, 1] \rightarrow M, \quad \sigma(s, t) := \exp_p(t(v + sw)).$$

Für diese finden wir

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}(s, t) &:= \partial_t \sigma(s, t) = D_{t(v+sw)} \exp_p(v + sw), \\ \sigma'(s, t) &:= \partial_s \sigma(s, t) = D_{t(v+sw)} \exp_p(tw) \end{aligned}$$

und somit insbesondere $D_v \exp_p(v) = \dot{\sigma}(0, 1)$ und $D_v \exp_p(w) = \sigma'(0, 1)$. Wir berechnen nun die Abbildung $t \mapsto \langle \dot{\sigma}, \sigma' \rangle(t, \cdot)$, an deren Wert bei 1 wir ja letztendlich interessiert sind. Zum einen gilt wegen $D_0 \exp_p = \text{id}$

$$\dot{\sigma}(0, 0) := \partial_t \sigma(0, 0) = D_0 \exp_p(v) = v \quad \text{und} \quad \sigma'(0, 0) := \partial_s \sigma(0, 0) = D_0 \exp_p(0) = 0$$

⁵Im Argument von $D_v \exp_p$ auf der linken Seite muss wieder $T_p M$ mit $T_v T_p M$ identifiziert werden.

1. Längen, Abstände und Geodäten

und somit $\langle \dot{\sigma}, \sigma' \rangle(0, 0) = 0$. Beachte weiter, dass $\sigma(s, \cdot)$ für jedes feste s eine Geodäte ist. Deshalb gilt erstens $\nabla_{\partial_t}^\sigma \dot{\sigma} = 0$ und zweitens hängt $|\dot{\sigma}(s, t)|$ nicht von t ab (Lemma 1.7). Es folgt

$$\begin{aligned} \partial_t \langle \dot{\sigma}, \sigma' \rangle &= \langle \dot{\sigma}, \nabla_{\partial_t}^\sigma \sigma' \rangle \stackrel{(A.32)}{=} \langle \dot{\sigma}, \nabla_{\partial_s}^\sigma \dot{\sigma} \rangle = \frac{1}{2} \partial_s \underbrace{\langle \dot{\sigma}, \dot{\sigma} \rangle}_{\text{unabh. von } t} \\ &\stackrel{(t=0)}{=} \frac{1}{2} \partial_s \langle v + sw, v + sw \rangle = \langle v, w \rangle + s \langle w, w \rangle . \end{aligned}$$

Es folgt $\partial_t \langle \dot{\sigma}, \sigma' \rangle(0, t) = \langle v, w \rangle$ für jedes $t \in [0, 1]$. Also gilt $\langle \dot{\sigma}, \sigma' \rangle(0, t) = t \langle v, w \rangle$ und für $t = 1$ ergibt sich die Behauptung.

Zu (ii): Sei $q \neq p$. Setze $v := \exp_p^{-1}(q) = x^i(q)e_i$. Für jedes $w = w^i e_i \in T_p M \cong T_v T_p M$ gilt dann nach einerseits

$$\langle v, w \rangle = g_{ij}(p)v^i w^j = \delta_{ij}x^i(q)w^j$$

nach Satz 1.16. Andererseits gilt

$$\begin{aligned} \langle D_v \exp_p(v), D_v \exp_p(w) \rangle &= v^i w^j \langle D_v \exp_p(e_i), D_v \exp_p(e_j) \rangle \\ &= v^i w^j \langle \partial_i|_q, \partial_j|_q \rangle \\ &= x^i(q)w^j g_{ij}(q) . \end{aligned}$$

Nach (i) stimmen diese beiden Ausdrücke für beliebiges w überein, woraus (ii) folgt.

Zu (iii): Wir müssen zeigen, dass $dr(W) = \left\langle \frac{\partial}{\partial r}, W \right\rangle$ für beliebige Vektorfelder W gilt. Dazu rechnen wir in Normalkoordinaten x . In solchen gilt $r = \sqrt{(x^1)^2 + \dots + (x^n)^2}$ und somit folgt zunächst

$$dr = \sum_{i=1}^n \frac{1}{r} x^i dx^i = \frac{1}{r} \delta_{ij} x^i dx^j \stackrel{(ii)}{=} \frac{1}{r} g_{ij} x^i dx^j$$

Hieraus folgt nun für beliebiges $W = W^i \frac{\partial}{\partial x^i}$

$$dr(W) = \frac{1}{r} g_{ij} x^i W^j = \left\langle \frac{x^i}{r} \partial_i, W^j \partial_j \right\rangle = \langle \partial_r, W \rangle .$$

Zu (iv): Die Orthogonalität von $\frac{\partial}{\partial r}$ folgt direkt aus (ii) und daraus, dass der Gradient einer Funktion immer senkrecht auf den Niveauflächen der Funktion steht. Dass ∂_r Einheitslänge hat wurde schon in Lemma 1.18 gezeigt. \square

Bemerkung 1.20. Die Aussagen aus dem Gauß-Lemma sind alle äquivalent. Die Äquivalenz von (i) und (iii) mit (ii) hat sich schon im Beweis ein bisschen angedeutet. Zu (iv) zerlege man einfach einen beliebigen Tangentialvektor innerhalb des geodätischen Balls in einen Anteil tangential zu einer geodätischen Sphäre und einen Anteil senkrecht dazu.

1.3. Lokale Geometrie in einer Normalenumgebung

- *Interpretation des Gauß-Lemmas:* \exp_p ist eine „radiale Isometrie“. Unter $D_v \exp_p$ bleiben Winkel zwischen einem „radialen Vektor“, also einem Vielfachen von v selbst (wobei $T_p M \cong T_v T_p M$), und einem beliebigen anderen Vektor erhalten.
- Noch eine Umformulierung des Gauß-Lemmas: Bezüglich der „Blätterung“ (1.15) von $\mathcal{B}(p, R) \setminus \{p\}$ in geodätische Sphären und der entsprechenden Zerlegung der Tangentialräume in direkte Summen hat die Metrik die Blockdiagonalform

$$g = dr^2 + h(r) \cong \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & h(r) \end{pmatrix}, \quad (1.18)$$

wobei $h(r)$ eine von r abhängige Metrik auf S_p ist.

Mit dem Gauß-Lemma lässt sich nun leicht beweisen, dass kurze Geodäten die Bogenlänge minimieren.

Ende der
dritten
Vorlesung
(5.11.)

Satz 1.21. *Sei $p \in M$ und sei q in einem geodätischen Ball um p enthalten. Dann ist die radiale Geodäte von p nach q die eindeutige minimierende Kurve von p nach q in M (bis auf monotone Reparametrisierung).*

Beweis. Sei $q \in \mathcal{B}(p, R)$, dann gilt zunächst $R' := r(q) < R$. Beachte weiter, dass die radiale Geodäte von p nach q genau Länge $r(q)$ hat.

Sei nun $c : [0, b] \rightarrow M$ eine beliebige glatte Kurve von p nach q . Gilt $c([0, b]) \subset \overline{\mathcal{B}(p, R')}$, so folgt aufgrund der Cauchy-Schwarz-Ungleichung (CSU) und wegen $|\text{grad } r| = 1$, dass

$$\ell(c) = \int_0^b |\dot{c}| dt \stackrel{\text{CSU}}{\geq} \int_0^b \langle \dot{c}, \text{grad } r \rangle dt = \int_0^b \frac{d}{dt} r(c(t)) dt = r(c(b)) - r(c(0)) = r(q). \quad (*)$$

Ist c nur stückweise glatt, so gilt dies immer noch: Man wende die Abschätzung auf jedes glatte Stück an und beachte, dass die „inneren Randterme“ sich herausheben, da c und damit auch $r \circ c$ stetig sind. Beachte weiter: Gilt $\ell(q) = r(q)$, so muss insbesondere Gleichheit in der CSU in (*) gelten. Daraus folgt, dass \dot{c} ein Vielfaches von $\text{grad } r$ ist. Nach eventueller Reparametrisierung von c nach Bogenlänge dürfen wir annehmen, dass $\dot{c} = \text{grad } r$ gilt (damit ist c in jedem Fall glatt). Also ist c eine Integralkurve von $\text{grad } r$, woraus wegen $|\text{grad } r| = 1$ folgt, dass c eine Geodäte ist (vgl. die anschließende Bemerkung). Da andererseits $\text{grad } r$ nach Lemma 1.18 in jedem Punkt gleich dem Geschwindigkeitsvektor der (nach Bogenlänge parametrisierten) radialen Geodäte durch diesen Punkt ist, muss c aufgrund der eindeutigen Lösbarkeit der Geodätengleichung mit dieser übereinstimmen.

Es bleibt noch der Fall, dass c den Abschluss des kleineren Balls verlässt. In diesem Fall wähle $t_0 \in [0, b]$ mit $c([0, t_0]) \subset \mathcal{B}(p, R)$ und $c(t_0) \notin \overline{\mathcal{B}(p, R')}$. Wie in (*) folgt dann $\ell(c) \geq \ell(c|_{[0, t_0]}) \geq r(c(t_0))$. Wegen $c(t_0) \notin \overline{\mathcal{B}(p, R')}$ folgt weiter $\ell(c) > R' = r(q)$. Also kommt eine solche Kurve überhaupt nicht als Kürzeste in Frage. \square

1. Längen, Abstände und Geodäten

Bemerkung 1.22 (Distanzfunktionen und ihre Integralkurven). Ein $f \in C^\infty(U)$ heißt *Distanzfunktion*, falls $|\text{grad } f| = 1$ gilt. Für beliebiges $X \in \Gamma^\infty(TU)$ gilt dann

$$\begin{aligned} 0 &= X \underbrace{\langle \text{grad } f, \text{grad } f \rangle}_{=1} = 2 \langle \nabla_X \text{grad } f, \text{grad } f \rangle \\ &= 2 \text{Hess } f(X, \text{grad } f) \\ &= 2 \text{Hess } f(\text{grad } f, X) = 2 \langle \nabla_{\text{grad } f} \text{grad } f, X \rangle, \end{aligned}$$

wobei $\text{Hess } f$ die auf Blatt 2 definierte *symmetrische* Bilinearform ist. Es folgt also, dass $\nabla_{\text{grad } f} \text{grad } f = 0$ gilt. Ist nun $c : I \rightarrow U$ eine Integralkurve von $\text{grad } f$, d.h. es gilt $\dot{c}(t) = \text{grad } f|_{c(t)}$, so folgt daraus, dass $\nabla_{\dot{c}}^c \dot{c} = 0$ gilt. Die Kurve c ist also eine Geodäte.

Korollar 1.23. *Sei $p \in M$. Innerhalb eines geodätischen Balls um p gelten:*

- (i) *Jeder Punkt lässt sich durch eine eindeutige radiale Geodäte mit p verbinden. Diese ist zudem die eindeutige Kurve minimaler Länge zwischen den zwei Punkten in M .*
- (ii) *Die radiale Abstandsfunktion stimmt mit $d(p, \cdot)$ überein. Letztere ist also insbesondere glatt außer in p selbst.*

Weiterhin stimmen die metrische Bälle und Sphären um p für hinreichend kleinen Radien mit den geodätischen überein. Kleine metrische Sphären sind somit glatte Hyperflächen.

Wir werden die erste Aussage nun noch dahingehend verschärfen, dass sich sogar je zwei Punkte aus einem geodätischen Ball von genügend kleinem Radius durch eine eindeutige kürzeste Kurve (in ganz M) verbinden lassen und diese innerhalb des Balles bleibt. Dazu benötigen wir eine „Kontrolle“ über die Abhängigkeit bezüglich Veränderungen des Mittelpunkts p , welche die folgende Aussage liefert.

Lemma 1.24. *Sei $E := \pi \times \exp : TM \rightarrow M \times M$, wobei $\pi : TM \rightarrow M$ die Fußpunktprojektion ist. Für alle $p \in M$ und $v \in T_p M \subset TM$ ist $D_v E : T_v TM \rightarrow T_{\exp(v)}(M \times M)$ genau dann regulär, wenn $D_v \exp_p : T_v T_p M \rightarrow T_{\exp(v)} M$ regulär ist. Insbesondere ist $D_{0_p}(\pi \times \exp)$ stets regulär und somit ist E folglich ein lokaler Diffeomorphismus zwischen geeigneten Umgebungen von $0_p \in TM$ und von $(p, p) \in M \times M$.*

Beweis. Da dies eine lokale Aussage ist, dürfen wir ohne Einschränkung annehmen, dass $TM = M \times \mathbb{R}^n$ gilt (rechne in Vektorbündelkarte). Für eine Kurve $t \mapsto (x(t), v(t)) \in TM$ mit $x(0) = x_0$ und $v(0) = v_0$ gilt dann

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\pi \times \exp)(x(t), v(t)) &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (x(t), \exp(x(t), v(t))) \\ &= \left(\dot{x}(0), \dot{x}^i(0) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{(x_0, v_0)} \exp + \dot{v}^i(0) \frac{\partial}{\partial v^i} \Big|_{(x_0, v_0)} \exp \right) \\ &= \left(\dot{x}(0), \dot{x}^i(0) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{(x_0, v_0)} \exp + \dot{v}^i(0) \frac{\partial}{\partial v^i} \Big|_{v_0} \exp_{x_0} \right). \end{aligned}$$

Dies ist genau dann Null, wenn $\dot{x}(0) = 0$ und $\dot{v}^i(0) \frac{\partial}{\partial v^i} \Big|_{v_0} \exp_{x_0} = 0$ gelten. Damit ist direkt klar, dass die Regularität von $D_v \exp_p$ die von $D_v(\pi \times \exp_p)$ impliziert. Sei umgekehrt angenommen, dass $D_v \exp_p$ nicht regulär ist. Sei dann weiter $w \in T_p M$ mit

1.3. Lokale Geometrie in einer Normalenumgebung

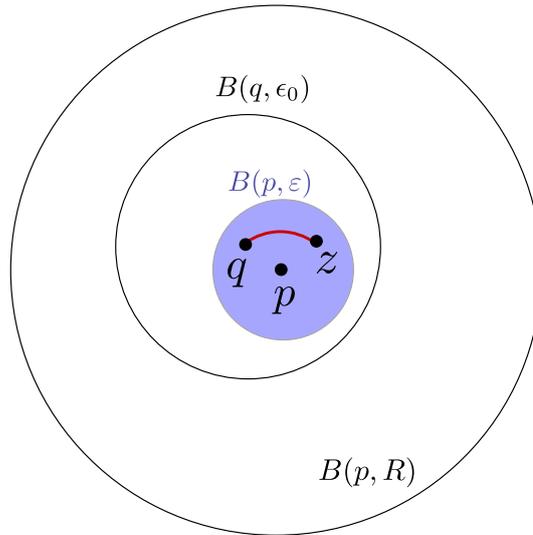


Abbildung 1.4.: Skizze zum Beweis von Satz 1.26 (Konstruktion geodätisch konvexer Bälle).

$D_v \exp_p(w) = 0$. Setzt man nun in obiger Rechnung die Kurve $t \mapsto (0, v + tw)$ ein, so ergibt sich $D_v(\pi \times \exp)((0, w)) = (0, 0)$. Also ist auch $D_v(\pi \times \exp)$ nicht regulär. \square

Korollar 1.25. *Sei $p \in M$. Dann existieren $\varepsilon > 0$ und eine offene Umgebung $U \subset M$ von p , sodass für jedes $q \in U$ die Einschränkung von \exp_q auf $\{v \in T_q M : |v| < \varepsilon\}$ ein Diffeomorphismus auf $B(q, \varepsilon)$ ist.*

Beweis. Nach dem vorherigen Lemma existiert $0_p \in \mathcal{V} \subset TM$ offen, die von $\pi \times \exp$ diffeomorph auf ihr Bild in $M \times M$ abgebildet wird. Aus Stetigkeitsgründen existieren eine offene Umgebung $U \subset M$ von p und $\varepsilon > 0$ mit $\{v \in TU : |v| < \varepsilon\} \subset \mathcal{V}$. Dann ist aber auch die Einschränkung von \exp_q auf $\{v \in TU : |v| < \varepsilon\} \cap T_q M = \{v \in T_q M : |v| < \varepsilon\}$ ein Diffeomorphismus auf dessen Bild. In der Tat folgt Injektivität direkt aus der von $\pi \times \exp$ und wegen ?? ist auch das Differential von \exp_q überall invertierbar, also die Umkehrfunktion glatt. \square

Satz 1.26 (Existenz geodätisch konvexer Bälle). *Sei $p \in M$. Dann hat jeder geodätische Ball um p von hinreichend kleinem Radius die folgenden Eigenschaften:*

- (i) *Er ist Normalenumgebung von jedem seiner Punkte.*
- (ii) *Je zwei seiner Punkte lassen sich durch eine eindeutige innerhalb des Balles verlaufende Geodäte verbinden. Diese ist zudem die eindeutige kürzeste Verbindende in M zwischen den beiden Punkten (bis auf Reparametrisierung).*

Beweis. Abbildung 1.4 mag zur Orientierung für den Beweis dienen.

Wähle eine geodätischen Ball $B(p, R)$. Dann ist $B(p, R)$ kompakt. Nach dem vorherigen Lemma und dieser Kompaktheit ter mit dem vorherigen Korollar ein $0 < \varepsilon_0 < \frac{R}{2}$

1. Längen, Abstände und Geodäten

so, dass die Einschränkung von \exp_q auf $\{v \in T_q M : |v| < \varepsilon_0\}$ für jedes $q \in C$ ein Diffeomorphismus auf das Bild dieser Menge ist.

Wir zeigen, dass $B(p, \varepsilon)$ für jedes $0 < \varepsilon < \frac{\varepsilon_0}{2}$ die gewünschten Eigenschaften besitzt. Sei dazu $q \in B(p, \varepsilon)$. Wegen $0 < \varepsilon < \frac{\varepsilon_0}{2} < \frac{R}{4}$ gelten die Inklusionen

$$B(p, \varepsilon) \subset B(q, \varepsilon_0) \subset B(p, R).$$

Also ist die Einschränkung von \exp_q auf $V_q := \exp_q^{-1}(B(p, \varepsilon)) \cap \{v \in T_q M : |v| < \varepsilon_0\}$ ein Diffeomorphismus $B(p, \varepsilon)$, da dies schon für $\{v \in T_q M : |v| < \varepsilon_0\}$ gilt. Wenn wir zeigen können, dass $V_q \subset T_p M$ sternförmig bezüglich 0_q ist, folgt (i). Dies wie auch (ii) folgt aus der folgenden Behauptung:

(*) Zu jedem $z \in B(p, \varepsilon) \subset B(q, \varepsilon_0)$ liegt die (nach Korollar 1.23 eindeutige) radiale Geodäte von q nach z innerhalb $B(p, \varepsilon_0)$ vollständig innerhalb $B(p, \varepsilon)$.

Hieraus folgt (i), denn diese Geodäte hat die Form $t \mapsto \exp_q(tv)$ mit dem (eindeutigen) $v \in T_q M$ mit $|v| < \varepsilon_0$ und $\exp_q(v) = z$ und $t \in [0, 1]$. Liegt nun diese Geodäte in $B(p, \varepsilon)$, so gilt offensichtlich auch $tv \in V_q$ für alle $t \in [0, 1]$. Also ist V_q sternförmig bezüglich 0_q .

Die Eindeutigkeit in (ii) folgt, da diese schon für die radiale Geodäten von q nach z innerhalb $B(q, \varepsilon_0)$ gilt. Weiter ist diese nach Korollar 1.23 die eindeutige minimierende Kurve von q nach z in ganz M (bis auf Reparametrisierung).

Es bleibt also lediglich der Beweis der Behauptung (*). Hierzu wählen wir Normalkoordinaten x um p (nicht q) und betrachten die Funktion $f(t) := d(p, c_v(t))$ auf $[0, 1]$. Wir wollen zeigen, dass $f < \varepsilon^2$ gilt. Beachte zunächst, dass $f(0) = d(p, q) < \varepsilon$ und $f(1) = d(p, z) < \varepsilon$ gelten. Wir zeigen nun, dass f strikt konvex ist, daraus folgt dann die Behauptung (nach dem „Maximumprinzip“). Mit $c_v^i := x^i \circ c_v$ gilt zunächst zunächst $f = (c_v^1)^2 + \dots + (c_v^n)^2$, da x Normalkoordinaten um p sind und somit weiter

$$\ddot{f} = 2 \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^n c_v^k \dot{c}_v^k = 2 \sum_{k=1}^n (\dot{c}_v^k)^2 - 2 \sum_{k=1}^n c_v^k \Gamma_{ij}^k(c_v) \dot{c}_v^i \dot{c}_v^j.$$

Für die hier auftretende Bilinearform (auf \mathbb{R}^n) mit Koeffizienten $B_{ij} := \sum_{k=1}^n x^k \Gamma_{ij}^k$ gilt $B_{ij}(p) = 0$ wegen $x(p) = 0$. Indem wir ganz zu Beginn $R > 0$ eventuell noch kleiner wählen, dürfen wir aus Stetigkeitsgründen annehmen, dass $B_{ij}(w) < \frac{1}{2} \delta_{ij}$ (als Bilinearform) für alle $w \in B(p, R)$ gilt. Dann folgt $\ddot{f} > \sum_{k=1}^n (\dot{c}_v^k)^2 > 0$. Also ist die Funktion $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ strikt konvex und der Beweis ist beendet. \square

Eine offene Menge von M , die Normalenumgebung eines jeden ihrer Punkte ist, wird als *totale Normalenumgebung* oder auch als *konvexe Umgebung* bezeichnet. Eine offene Menge mit der Eigenschaft, dass sich je zwei ihrer Punkte durch eine eindeutige in der Menge liegende Geodäte verbinden lassen, die zudem in ganz M die kürzeste Verbindende zwischen den beiden Punkten ist, wird *streng konvex* oder *geodätisch konvex* genannt. Hinreichend kleine Bälle sind somit geodätisch konvex. In Abbildung 1.5 ist eine totale Normalenumgebung dargestellt, die nicht geodätisch konvex ist.

1.3. Lokale Geometrie in einer Normalenumgebung



Abbildung 1.5.: Eine konvexe Umgebung auf S^1 , die nicht streng konvex ist. (zeichne „von 7 bis 17 Uhr“ im Uhrzeigersinn)

Bemerkung 1.27. Der Durchschnitt zweier geodätisch konvexer Mengen muss im Allgemeinen nicht wieder geodätisch konvex sein. Liegen die beiden geodätisch konvexen Mengen jedoch in einer gemeinsamen, größeren geodätisch konvexen Umgebung, so ist auch ihr Durchschnitt wieder geodätisch konvex. Aus der Forderung, dass eine Mannigfaltigkeit dem *zweiten Abzählbarkeitsaxiom* genügen soll, folgt, dass jede Riemannsche Mannigfaltigkeit eine Überdeckung durch geodätisch konvexe Mengen besitzt, für welche der Durchschnitt von je zweien wieder geodätisch konvex ist (siehe [O’Neill, p.131]). Eine solche Überdeckung wird *geodätisch konvexe Überdeckung* genannt.

Korollar 1.28 (Geodäten sind lokal minimierend). *Sei $c : I \rightarrow M$ eine Geodäte. Dann existiert zu jedem $t_0 \in I$ ein $\varepsilon > 0$ mit $\ell(c|_{[a,b]}) = d(c(a), c(b))$ für alle $a, b \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$.*

Beweis. Zu $t_0 \in I$ wähle eine konvexe Umgebung von $c(t_0)$. Das Stück von c innerhalb dieser ist natürlich eine verbindende Geodäte zwischen je zwei Punkten auf diesem. Aufgrund der Eindeutigkeitsaussage in (ii) in Satz 1.26 ist dieses also minimierend. \square

Korollar 1.29 (Minimierende Kurven sind Geodäten). *Seien $p, q \in M$. Ist $c \in \Omega_{p,q}$ mit $\ell(c) = d(p, q)$, so lässt sich c zu einer Geodäte umparametrisieren.*

Beweis. Ohne Einschränkung sei c nach Bogenlänge parametrisiert. Wähle eine Zerlegung $a = t_1 < t_2 < \dots < t_{N+1} = b$ des Definitionsbereichs von c , sodass jedes zugehörige Teilstück von c in einer geodätisch konvexen Menge liegt. Da c als ganzes minimiert, trifft dies auch auf jede Einschränkung von c zu. Nach Satz 1.26 muss somit jede Einschränkung $c|_{[t_i, t_{i+1}]}$ (nach evtl. Reparametrisierung) eine nach Bogenlänge parametrisierte Geodäte sein. Wir müssen noch zeigen, dass sich die Teilstücke (nach eventuell weiteren Umparametrisierungen) glatt zusammenfügen. Wähle dazu nochmals eine konvexe Umgebung U von $c(t_i)$ für ein $i = 2, \dots, n$. Das Stück von c in U besteht aus den beiden nach Bogenlängen parametrisierten Geodätenstücken $c|_{[t_{i-1}, t_i]}$ und $c|_{[t_i, t_{i+1}]}$. Die Zusammensetzung dieser lässt sich nach Satz 1.26 wieder als *eine* nach Bogenlänge

1. Längen, Abstände und Geodäten

parametrisierte Geodäte umparametrisieren. Dann muss aber schon $c|_{[t_{i-1}, t_{i+1}]}$ eine solche sein, da eine Umparametrisierung einer nach Bogenlänge parametrisierten Geodäte auf wieder eine solche nichts mehr ändert. \square

1.4. Vollständigkeit und der Satz von Hopf-Rinow

Bisher haben wir nur *lokale* Überlegungen angestellt. Nun wollen wir uns mit *globalen* Fragestellungen beschäftigen. Um hier schöne Aussagen machen zu können, benötigen wir eine Voraussetzung, die die Konstruktion von „pathologischen Gegenbeispielen“ durch Herausnehmen von Teilen der Mannigfaltigkeit verhindert. Folgender Begriff ist der meist verbreiteste.

Definition 1.30 (Geodätische Vollständigkeit). Eine Riemannsche Mannigfaltigkeit wird *geodätisch vollständig* genannt, wenn jede Geodäte auf ganz \mathbb{R} definiert ist.

Bemerkung 1.31. Eine Riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g) wird *erweiterbar* genannt, falls es eine isometrische, offene Einbettung $M \hookrightarrow N$ in eine andere („größere“) Riemannsche Mannigfaltigkeit (N, h) gibt. Man kann zeigen, dass geodätisch vollständige Mannigfaltigkeit nicht erweiterbar ist, umgekehrt muss dies jedoch nicht gelten.

Lemma 1.32 (Existenz minimierender Kurven bei Vollständigkeit). *Sei $p \in M$. Ist \exp_p auf ganz $T_p M$ definiert (d.h. sind alle durch p verlaufenden Geodäten für alle Zeiten definiert), so gibt es zu jedem $q \in M$ eine minimierende Geodäte von p nach q . Ist sogar \exp auf ganz TM definiert, so lassen sich also je zwei Punkte von M durch eine minimierende Geodäte verbinden.*

Beweis. Sei $q \in M$ gegeben. Setze $d := d(p, q)$.

Wähle $\varepsilon > 0$ hinreichend klein, sodass $S(p, \varepsilon)$ eine geodätische Sphäre ist.

Wähle $z \in S(p, \varepsilon)$ mit minimalem Abstand zu q (beachte, dass $S(p, \varepsilon)$ kompakt ist).

Sei $c : \mathbb{R} \rightarrow M$ die nach Bogenlänge parametrisierte radiale Geodäte von p durch z .

(Ziel: $c(d) = q$ und somit auch $\ell(c|_{[0, d]}) = d = d(p, q)$.)

Setze

$$A := \{t \in [0, d] : d(c(t), q) = d - t\}.$$

(Neues Ziel: $A = [0, d]$ und somit $d(c(d), q) = 0$.)

Die Menge $A \subset [0, d]$ ist nichtleer ($0 \in A$) und abgeschlossen aus Stetigkeitsgründen.

Somit existiert $t_0 := \sup A \in [0, d]$.

(Neues Ziel: $t_0 = d$)

Angenommen es gilt $t_0 < d$. Setze $p_0 := c(t_0)$.

Wähle $\varepsilon_0 > 0$ so, dass $S(p_0, \varepsilon_0)$ eine geodätische Sphäre ist und $t_0 + \varepsilon < d$ gilt.

Wähle $z_0 \in S(p_0, \varepsilon_0)$ mit minimalem Abstand zu q .

Sei $c_0 : [0, \varepsilon_0] \rightarrow M$ die nach B-Länge parametrisierte radiale Geodäte von p_0 nach z_0 .

Wegen Stetigkeit gilt $d(p_0, q) = d(c(t_0), q) = d - t_0$.

1.4. Vollständigkeit und der Satz von Hopf-Rinow

Andererseits gilt $d(p_0, q) = d(p_0, z_0) + d(z_0, q)$, denn: Falls nicht, muss „ $<$ “ gelten. Wähle dann $\gamma \in \Omega_{p_0, q}$ mit $\ell(\gamma) < d(p_0, z_0) + d(z_0, q)$. Diese Kurve γ muss $S(p_0, \varepsilon_0)$ schneiden. Zerlege γ an einem solchem Schnittpunkt in zwei Teile γ_1 und γ_2 . Dann gilt

$$\varepsilon_0 + \ell(\gamma_2) \leq \ell(\gamma) < d(p_0, z_0) + d(z_0, q) = \varepsilon_0 + d(z_0, q),$$

also $\ell(\gamma_2) < d(z_0, q)$. Dies widerspricht der Wahl von z_0 (minimaler Abstand zu q).

Kombination der letzten beiden Überlegungen ergibt

$$d(z_0, q) = d - (t_0 + \varepsilon_0). \quad (*)$$

Somit folgt

$$d(p, z_0) \geq \underbrace{d(p, q) - d(z_0, q)}_{=d} \stackrel{(*)}{=} t_0 + \varepsilon' = \ell(c|_{[0, t_0]}) + \ell(c_0).$$

Dies zeigt, dass die aus $c|_{[0, t_0]}$ und c_0 zusammengesetzte Kurve den Abstand von p zu z_0 minimiert. Aus Korollar 1.29 folgt, dass diese Kurve eine Geodäte ist. Deshalb gilt $c(t_0 + \varepsilon_0) = c_0(\varepsilon_0) = z_0$ und somit weiter

$$d(c(t_0 + \varepsilon_0), q) = d(z_0, q) \stackrel{(*)}{=} d - (t_0 + \varepsilon_0).$$

Dies widerspricht der Definition von t_0 (dessen Maximalität).

Also gilt $t_0 = d$. □

Dieses Lemma wird die Hauptarbeit beim Beweis unseres ersten Theorems leisten.

Theorem 1.33 (Hopf-Rinow). *Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und sei d die durch (1.3) definierte Metrik auf M . Dann sind äquivalent:*

- (i) (M, g) ist geodätisch vollständig.
- (ii) Die Exponentialabbildung hat maximalen Definitionsbereich, d.h. eine und damit jede der folgenden Aussagen gelten:
 - a) \exp ist auf ganz TM definiert.
 - b) Für jedes $p \in M$ ist \exp_p auf ganz T_pM definiert.
 - c) Es gibt einen Punkt $p \in M$, sodass \exp_p auf ganz T_pM definiert ist.
- (iii) Der metrische Raum (M, d) ist vollständig.
- (iv) Der metrische Raum (M, d) besitzt die Heine-Borel-Eigenschaft, d.h. jede abgeschlossene und (bezüglich d) beschränkte Teilmenge ist kompakt.

Gelten diese Aussagen, so lassen sich weiter je zwei Punkte stets durch eine minimierende Geodäte verbinden.

1. Längen, Abstände und Geodäten

Beweis. Es ist klar, dass $(i) \iff (ii)a \iff (ii)b \implies (ii)c$ gelten.

$(ii)b \implies (iii)$: Sei $p \in M$ wie in (ii)b) und sei $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in (M, d) . Setze $d_n := d(p, q_n)$. Nach dem vorherigen Lemma existiert für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine minimierende Geodäte $c_n : [0, d_n] \rightarrow M$ von p nach q_n . Für $v_n := \dot{c}_n(0)$ gilt dann $|v_n| = 1$. Beachte nun:

- Aufgrund der Kompaktheit von $S_p = \{v \in T_p M : |v| = 1\}$ hat $(\dot{c}_n(0))_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge. Ohne Einschränkung gelte $\dot{c}_n(0) \rightarrow v \in S_p$.
- Aufgrund der Dreiecksungleichung gilt

$$-d(q_m, q_n) \leq d(p, q_n) - d(p, q_m) = d_n - d_m = d(p, q_n) - d(p, q_m) \leq d(q_n, q_m),$$

also gilt $|d_n - d_m| \leq d(q_n, q_m)$. Somit ist $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in \mathbb{R} , d.h. es gilt $d_n \rightarrow d \in \mathbb{R}$.

Mit der Stetigkeit der Exponentialabbildung folgt:

$$q_n = \exp_p(d_n v_n) \rightarrow \exp_p(dv),$$

also konvergiert die Folge $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

$(iii) \implies (i)$: Übungsaufgabe.

Damit ist die Äquivalenz von (i), (ii) und (iii) gezeigt.

$(iv) \implies (iii)$: Das Bild einer Cauchyfolge ist beschränkt und sein Abschluss somit bei Gültigkeit von (iv) kompakt ist. Deshalb hat jede Cauchyfolge eine konvergente Teilfolge. Die Cauchybedingung impliziert dann weiter, dass auch die Folge selbst konvergiert.

$(i) \implies (iv)$: Übungsaufgabe. □

Ende der
vierten
Vorlesung
(12.11.),
ohne die
Beweise.

2. Jacobifelder und die zweite Variation der Bogenlänge

2.1. Jacobifelder und nochmal das Differential der Exponentialabbildung

Lemma 2.1. Sei $\sigma : (-\varepsilon, \varepsilon) \times I \rightarrow M$ eine glatte Variation von $c := \sigma(0, \cdot)$. Ist σ geodätisch, d.h. ist $\sigma(s, \cdot)$ für jedes $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ eine Geodäte, so erfüllt das Variationsvektorfeld $V := \partial_s \sigma(0, \cdot) \in \Gamma^\infty(c^*TM)$ die Jacobigleichung

$$\ddot{V} + R(V, \dot{c})\dot{c} = 0, \quad (2.1)$$

wobei $\ddot{V} = \nabla_{\partial_t}^c \nabla_{\partial_t}^c V$.

Beweis. Mit dem „Schwarz-Lemma“ A.10 und der Definition des Krümmungstensors ergibt sich

$$\nabla_{\partial_t}^\sigma \nabla_{\partial_t}^\sigma \partial_s \sigma = \nabla_{\partial_t}^\sigma \nabla_{\partial_s}^\sigma \partial_t \sigma = \nabla_{\partial_s}^\sigma \underbrace{\nabla_{\partial_t}^\sigma \partial_t \sigma}_{=0 \text{ (Geod.)}} + R^\sigma(\partial_t, \partial_s) \partial_t \sigma = R(\partial_t \sigma, \partial_s \sigma) \partial_t \sigma.$$

Für $s = 0$ folgt $\ddot{V} = R(\dot{c}, V)\dot{c}$ bzw. (2.1) wegen der Antisymmetrie von R . □

Definition 2.2. Sei $c : I \rightarrow M$ eine Geodäte. Ein Vektorfeld $V \in \Gamma^\infty(c^*TM)$ längs c heißt *Jacobifeld*, wenn es die *Jacobigleichung* (2.1) erfüllt.

Die Jacobigleichung ergibt sich auch auf natürliche Weise aus der zweiten Variation der Bogenlänge (Übungsaufgabe) und wir werden diesen Zusammenhang später als wesentliches Werkzeug nutzen. Zunächst beschäftigen wir uns aber rein mit der Jacobigleichung. Man beachte, dass diese eine *lineare* Gleichung zweiter Ordnung ist.

Lemma 2.3. Sei $c : I \rightarrow M$ eine Geodäte und $t_0 \in I$. Die Menge aller Jacobifelder längs c ist ein \mathbb{R} -Untervektorraum von $\Gamma^\infty(c^*TM)$ der Dimension $2n$. Zu gegebenen $v, w \in T_{c(t_0)}M$ existiert genau ein Jacobifeld J mit $J(t_0) = v$ und $\dot{J}(t_0) = w$.

Beweis. Aufgrund der Linearität der Jacobigleichung (2.1) bilden die Jacobifelder einen Untervektorraum. Für die restlichen Aussagen schreiben wir die Jacobigleichung mittels Paralleltransport in eine „normale“ ODE um. Seien dazu $t_0 \in I$ und $e_1, \dots, e_n \in T_{c(t_0)}M$ eine Orthonormalbasis. Für $i = 1, \dots, n$ definiere $E_i \in \Gamma^\infty(c^*TM)$ durch

$$E_i(t) := \mathcal{P}_{t_0, t}^c(e_i),$$

2. Jacobifelder und die zweite Variation der Bogenlänge

wobei \mathcal{P}^c der Paralleltransport längs c ist. Dann ist $\{E_i\}$ ein paralleler Orthonormalrahmen längs c . Schreibe damit $J \in \Gamma^\infty(c^*TM)$ als $J = f^i E_i$ mit $f^1, \dots, f^n \in C^\infty(I)$. Aufgrund der Parallelität von E_1, \dots, E_n gilt dann $\dot{J} = \dot{f}^i E_i$. Den Krümmungsterm in der Jacobigleichung zerlegen wir ebenfalls als

$$R(V, \dot{c})\dot{c} = f^i R(E_i, \dot{c})\dot{c} =: f^i r_i^j E_j,$$

mit $r_i^j := \varepsilon^j(R(E_i, \dot{c})\dot{c}) = \langle R(E_i, \dot{c})\dot{c}, E_j \rangle \in C^\infty(I)$, wobei $\{\varepsilon^i\}$ der zu $\{E_i\}$ duale Rahmen ist.¹ Es folgt, dass J genau dann ein Jacobifeld ist, wenn für alle $i = 1, \dots, n$ die Gleichung

$$\ddot{f}^i + r_j^i f^j = 0$$

gilt. Dies ist ein lineares System von ODEs zweiter Ordnung, welches zu gegebenen Anfangswerten $f(0)$ und $\dot{f}(0)$ immer eine eindeutige (globale) Lösung hat. \square

Proposition 2.4 (Differential der Exponentialabbildung und Jacobifelder). *Sei $p \in M$ und sei $v \in \mathcal{D}_p \subset T_p M$.*

- (i) *Für $w \in T_p M \cong T_v T_p M$ gilt $D_v \exp_p(w) = J(1)$, wobei J das eindeutige Jacobifeld längs der Geodäte c_v mit $J(0) = 0$ und $\dot{J}(0) = w$ ist.*
- (ii) *Der Punkt v ist genau dann ein kritischer Punkt von \exp_p , wenn es ein nichttriviales Jacobifeld längs der Geodäte c_v gibt, das bei $t = 0$ und $t = 1$ verschwindet.*

Beweis. Im Beweis des Gauß-Lemmas haben wir schon gesehen, dass $D_v \exp_p(w) = V(1)$ für das Variationsfeld der geodätischen Variation $\sigma(s, t) := \exp_p(t(v + sw))$ gilt. Es bleibt zu zeigen, dass $V(0) = 0$ und $\dot{V}(0) = w$ gelten. Hierzu rechnen wir einerseits

$$V(0) = (\partial_s \sigma)(0, 0) = D_0 \exp_p(0) = 0$$

und andererseits

$$\dot{V}(0) = (\nabla_{\partial_t}^\sigma \partial_s \sigma)(0, 0) = (\nabla_{\partial_s}^\sigma \partial_t \sigma)(0, 0).$$

Beachte weiter, dass $\sigma(0, s) = \exp_p(0) = p$ konstant ist und $\partial_t \sigma(0, s) = v + sw$ gilt. Deshalb folgt $(\nabla_{\partial_s}^\sigma \partial_t \sigma)(0, s) = w$ für alle s , insbesondere also $\dot{V}(0) = w$. \square

Satz 2.5 (Charakterisierung von Flachheit). *Eine Riemannsche Mannigfaltigkeit ist genau dann flach, d.h. ihr Riemannsche Krümmungstensor ist 0, wenn jeder Punkt eine Umgebung hat, die isometrisch zu einer offenen Teilmenge des euklidischen \mathbb{R}^n ist.*

Beweis. Die Rückrichtung ist klar, da der Krümmungstensor eine lokale Größe ist. Für die Hinrichtung sei $R = 0$ und sei $p \in M$. Wir zeigen, dass \exp_p auf einer hinreichend kleinen Menge eine Isometrie ist (wobei auf $T_p M$ die konstante Metrik g_p verwendet wird). Sei dazu $v \in T_p M$ und seien $w, z \in T_p M \cong T_v T_p M$. Seien W, Z die parallelen Vektorfelder längs c_v mit $W(0) = w$ und $Z(0) = z$. Aus der Parallelität und $R = 0$ folgt,

¹Beachte, dass sich die Indizes hier *nicht* auf Koordinaten beziehen, sondern auf einen Rahmen.

2.1. Jacobifelder und nochmal das Differential der Exponentialabbildung

dass dann tW und tZ Jacobifelder mit Anfangswerten $(tW)(0) = 0$, $\nabla_{\partial_t}(tW)(0) = w$ sowie $(tZ)(0) = 0$, $\nabla_{\partial_t}(tZ) = z$ sind. Nach der vorherigen Proposition gilt somit

$$\langle D_v \exp_p(w), D_v \exp_p(z) \rangle = \langle W(1), Z(1) \rangle = \langle W(0), Z(0) \rangle = \langle w, z \rangle .$$

Also ist $D_v \exp_p$, insbesondere also regulär. Die Einschränkung von \exp_p auf jede offene Umgebung von 0_p , auf welcher \exp_p injektiv ist, ist dann die gesuchte Isometrie. \square

Damit ist plausibel, dass die Koeffizienten höhere Ordnung in der Taylorentwicklung von g_{ij} in Normalkoordinaten Krümmungsausdrücke enthalten sollten (siehe Übungen für den ersten nichttrivialen Koeffizient).

Definition 2.6 (Konjugierte Punkte). Sei $c : I \rightarrow M$ eine Geodäte und seien $a, b \in I$. Man nennt a und b oder auch $c(a)$ und $c(b)$ *konjugiert längs c* , falls ein nichttriviales Jacobifeld $J \in \Gamma^\infty(c^*TM)$ mit $J(a) = 0$ und $J(b) = 0$ existiert.

Nach Proposition 2.4 ist die Existenz konjugierter Punkte äquivalent zu Singularitäten der Exponentialabbildung (im Sinne eines verschwindenden Differentials). Existieren keine konjugierten Punkte, so ist die Exponentialabbildung ein lokaler Diffeomorphismus (um jeden Punkt in ihrem Definitionsbereich).

Wir beweisen noch einige einfache aber nützliche Eigenschaften von Jacobifeldern.

Lemma 2.7 (Jacobifelder durch Randwerte festlegen). Sei $c : [a, b] \rightarrow M$ eine Geodäte. Sind a und b nicht zueinander konjugiert, so gibt es zu gegebenen $v \in T_{c(a)}M$ und $w \in T_{c(b)}M$ ein eindeutiges Jacobifeld mit $J(a) = v$ und $J(b) = w$.

Beweis. Die lineare Abbildung, die ein Jacobifeld J auf $(J(a), J(b)) \in T_{c(a)}M \oplus T_{c(b)}M$ abbildet, ist injektiv wenn a und b nicht zueinander konjugiert sind. Aus Dimensionsgründen ist sie somit ein Isomorphismus. \square

Lemma 2.8 (Senkrechte Jacobifelder). Seien $c : I \rightarrow M$ eine Geodäte, $J \in \Gamma^\infty(c^*TM)$. Schreibt man $J = J^\parallel + J^\perp$ mit $J^\parallel = \langle J, \dot{c} \rangle \dot{c}$, so ist J genau dann ein Jacobifeld wenn J^\parallel und J^\perp Jacobifelder sind. In diesem Fall sind weiter äquivalent:

(i) Für alle $t \in I$ gilt $\langle J(t), \dot{c}(t) \rangle = 0$.

(ii) Es gibt $t_1, t_2 \in I$ mit $t_1 \neq t_2$ und $\langle J(t_1), \dot{c}(t_1) \rangle = 0$ sowie $\langle J(t_2), \dot{c}(t_2) \rangle = 0$.

(iii) Es gibt $t \in I$ mit $\langle J(t), \dot{c}(t) \rangle = 0$ und $\langle \dot{J}(t), \dot{c}(t) \rangle = 0$.

Ein Jacobifeld, das diese Bedingungen erfüllt, wird senkrecht Jacobifeld genannt.

Beweis. Kleine Übung. \square

In verschiedener Hinsicht sind nur die senkrechten Jacobifelder wirklich interessant. So rechnet man zum Beispiel leicht nach, dass ein Jacobifeld J genau dann zu c tangential ist, wenn $J(t) = (a + tb)\dot{c}(t)$ für gewisse $a, b \in \mathbb{R}$ gilt. Diese Jacobifelder entsprechen geodätischen Variationen, die den Anfangspunkt längs der Geodäte verschieben (Rolle von a) bzw. die Geodäte affin umparametrisieren (Rolle von b). Geometrisch sind diese beiden Effekte natürlich eher uninteressant.

2. Jacobifelder und die zweite Variation der Bogenlänge

Lemma 2.9. Sei $c : [0, b] \rightarrow M$ eine Geodäte und $J \in \Gamma^\infty(c^*TM)$ ein Jacobifeld. Dann existiert eine geodätische Variation $\sigma : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [0, b] \rightarrow M$ mit $(\partial_s \sigma)(0, \cdot) = J$.

Beweis. Sei $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ die Geodäte mit $\gamma(0) = c(0)$ und $\dot{\gamma}(0) = J(0)$. Definiere $W \in \Gamma^\infty(\gamma^*TM)$ durch

$$W(s) := \mathcal{P}_{0 \rightarrow s}^\gamma(\dot{c}(0)) + s \cdot \mathcal{P}_{0 \rightarrow s}^\gamma(\dot{J}(0))$$

und setze $\sigma(s, t) := \exp_{\gamma(s)}(tW(s))$. Für $\varepsilon > 0$ hinreichend ist dies nach Satz 1.8 (iv) auf $(-\varepsilon, \varepsilon) \times [a, b]$ definiert. Es gilt

$$\sigma(0, t) = \exp_{\gamma(0)}(tW(0)) = \exp_{c(0)}(t\dot{c}(0)) = c(t),$$

also ist σ eine Variation von c . Nach Konstruktion ist σ eine geodätische Variation, also ist $V(t) := (\partial_s \sigma)(t, \cdot)$ ein Jacobifeld längs c . Wenn wir zeigen können, dass dieses die gleichen Anfangswerte wie J annimmt, sind die beiden nach Lemma 2.3 gleich. Zunächst folgt aus $\sigma(s, 0) = \exp_{\gamma(s)}(0) = \gamma(s)$, dass $V(0) = (\partial_s \sigma)(0, 0) = \dot{\gamma}(0) = J(0)$ gilt. Weiter rechnen wir mit Hilfe des „Schwarz-Lemmas“ A.10

$$\dot{V}(0) = (\nabla_{\partial_t}^c V)(0) = (\nabla_{\partial_t}^\sigma \partial_s \sigma)(0, 0) = (\nabla_{\partial_s}^\sigma \partial_t \sigma)(0, 0).$$

Es ist $\partial_t \sigma = D_{tW(s)} \exp_{\gamma(s)}(W(s))$ und somit $(\partial_t \sigma)(s, 0) = D_0 \exp_{\gamma(s)}(W(s)) = W(s)$. Aus der Definition von W und der Parallelität von Paralleltransporten folgt schließlich

$$\dot{V}(0) = \dot{W}(0) = \mathcal{P}_{0 \rightarrow 0}^\gamma(\dot{J}(0)) = \dot{J}(0).$$

□

2.2. Konstante Krümmung und Modellräume I

Man sagt, (M, g) habe *konstante Krümmung*, falls die Schnittkrümmung konstant ist. Nach ?? ist dies gleichbedeutend dazu, dass sich der Krümmungstensor schreiben lässt als

$$R(X, Y)Z = \kappa(\langle Y, Z \rangle X - \langle X, Z \rangle Y), \quad (2.2)$$

wobei $\kappa \in \mathbb{R}$ der (konstante) Wert der Schnittkrümmung ist und $X, Y, Z \in \Gamma^\infty(TM)$ beliebige Vektorfelder sind. Es gibt drei besonders einfache Mannigfaltigkeiten konstanter Krümmung, die als *Modellräume* bezeichnet werden.

Definition 2.10 (Modellräume). Seien $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ und $\kappa \in \mathbb{R}$. Mit M_κ^n bezeichnen wir, je nach Wert von κ , eine der folgenden Riemannschen Mannigfaltigkeiten:

($\kappa = 0$) Den flachen euklidischen Raum \mathbb{R}^n .

($\kappa > 0$) Die runde Sphäre $S_{\sqrt{\kappa}}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ von Radius $\sqrt{\kappa}$.

($\kappa < 0$) Den hyperbolischen Raum $B(0, R) \subset \mathbb{R}^n$ mit Metrik $\frac{4\kappa}{(\kappa^2 - |\cdot|^2)^2} g_{\mathbb{R}^n}$.

2.2. Konstante Krümmung und Modellräume I

Wir werden am Ende dieses Kapitels beweisen, dass die Modellräume schon *eindeutig* durch die in der folgenden Proposition beschriebenen Eigenschaften charakterisiert sind.

Proposition 2.11. *Für jedes $n \geq 2$ und $\kappa \in \mathbb{R}$ ist M_κ^n eine vollständige, einfach zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit mit konstanter Krümmung κ .*

Beweis. Das sind alles direkte Rechnungen. Dass die Sphäre einfach zusammenhängend ist, sieht man z.B. unter Verwendung der stereographischen Projektion und der Tatsache, dass eine glatte Kurve in S^n mit $n \geq 2$ nicht surjektiv sein kann. □

Die einfache Form des Krümmungstensors bei konstanter Krümmung vereinfacht auch die Jacobi Gleichung erheblich, sodass sich diese quasi exakt lösen lässt.

Lemma 2.12 (Jacobifelder in konstanter Krümmung). *Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit konstanter Krümmung $\kappa \in \mathbb{R}$, $c : [0, b) \rightarrow M$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Geodäte und $J \in \Gamma^\infty(c^*TM)$. Dann ist J genau dann ein senkrecht Jacobifeld mit $J(0) = 0$ und $\dot{J}(0) = w$, falls*

$$J(t) = \text{sn}_\kappa(t) \cdot \mathcal{P}_{0 \rightarrow t}^c(w) \quad \text{mit} \quad \text{sn}_\kappa(t) = \begin{cases} \frac{\sin(\sqrt{\kappa}t)}{\sqrt{\kappa}} & \text{für } \kappa > 0, \\ t & \text{für } \kappa = 0, \\ \frac{\sinh(\sqrt{-\kappa}t)}{\sqrt{-\kappa}} & \text{für } \kappa < 0. \end{cases} \quad (2.3)$$

für alle $t \in [0, b)$ gilt.

Beweis. Ist J senkrecht auf \dot{c} , so gilt aufgrund der konstanten Krümmung und der Bogenlängenparametrisierung von c

$$R(J, \dot{c})\dot{c} = \kappa(\langle \dot{c}, \dot{c} \rangle J - \langle J, \dot{c} \rangle \dot{c}) = \kappa J.$$

Die Jacobi Gleichung lautet somit $\ddot{J} + \kappa J = 0$. Stellt man J wie im Beweis von Lemma 2.3 bezüglich eines parallelen Orthonormalrahmens längs c dar, so erhält man für die Komponenten von J die Gleichungen $\ddot{J}^i + \kappa J^i = 0$. Die Lösungen hiervon sind je nach Vorzeichen von κ gerade die trigonometrischen bzw. hyperbolischen Funktionen. Die Bedingung $J(0) = 0$ selektiert den Sinus (Hyperbolicus). □

Korollar 2.13. *(M, g) habe konstante Schnittkrümmung $\kappa \in \mathbb{R}$. Dann gilt*

$$\langle D_v \exp_p(w), D_v \exp_p(z) \rangle = \text{sn}_\kappa^2(|v|) \langle w, z \rangle \quad (2.4)$$

für alle $p \in M$ und $v, w, z \in T_p M$ mit $w, z \perp v$.

Beweis. Dies ergibt sich direkt aus Proposition 2.4 und Lemma 2.12. Das richtige Argument $|v|$ in sn_κ erhält man, indem man die entsprechende Geodäte nach Bogenlänge parametrisiert. □

Ende der
sechsten
Vorlesung
(27.11.)

2. Jacobifelder und die zweite Variation der Bogenlänge

Wir können nun leicht zeigen, dass alle Räume derselben konstanten Krümmung lokal isometrisch sind.

Theorem 2.14 (Konstante Krümmungsräume sind lokal Modellräume). *Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit konstanter Schnittkrümmung $\kappa \in \mathbb{R}$ und sei $p \in M$. Auf einem punktierten geodätischen Ball $B(p, R) \setminus \{p\} \cong (0, R) \times S^{n-1}$ gilt*

$$g|_{B(p,R)} \cong dr^2 + \operatorname{sn}_\kappa^2(r) \mathring{g}_{S^{n-1}}, \quad (2.5)$$

wobei r die (geodätische) Abstandsfunktion zu p ist und $\mathring{g}_{S^{n-1}}$ die runde Metrik auf S^{n-1} . Insbesondere ist $B(p, R)$ isometrisch zu einem Ball mit demselben Radius in M_κ^n und alle Räume derselben konstanten Krümmung sind lokal isometrisch.

Beweis. Nach dem Gauß-Lemma 1.19 bzw. wie im Anschluss an dieses in (1.18) angemerkt, gilt $g = dr^2 + h(r)$, wobei $h(r)$ eine von r abhängige Metrik auf S^{n-1} ist. Dass diese die gewünschte Form hat folgt unmittelbar aus Korollar 2.13. \square

Global müssen Räume derselben konstanten Krümmung nicht isometrisch sein, da es topologische Unterschiede geben kann (zum Beispiel kann man Quotienten bilden). Wie wir am Ende des Kapitels sehen werden, gibt es jedoch bis auf Isometrie stets nur eine *einfache zusammenhängende* Mannigfaltigkeit einer gegebenen konstanten Krümmung. Je nach Vorzeichen der Krümmung ist das Argument dafür leicht unterschiedlich und wird in den folgenden beiden Abschnitten vorbereitet.

2.3. Nichtpositive Schnittkrümmung und Überlagerungen

Anschaulich gesprochen laufen Geodäten in nichtpositiver Krümmung stets voneinander weg (anders als z.B. auf der positiv gekrümmten Kugel). Formaler äußert sich dies darin, dass es bei nichtpositiver Krümmung keine konjugierten Punkte gibt.

Lemma 2.15. *Ist die Schnittkrümmung von (M, g) nichtpositiv, $K \leq 0$, so gibt es keine konjugierten Punkte. Folglich hat die Exponentialabbildung keine kritischen Punkte, ist also ein lokaler Diffeomorphismus (um jeden Punkt ihres Definitionsbereichs).*

Beweis. Nach Proposition 2.4 folgt die zweite Aussage aus der ersten. Zum Ausschließen von konjugierten Punkten seien $c : [0, \infty) \rightarrow M$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Geodäte und $J \in \Gamma^\infty(c^*TM)$ ein nichttriviales senkrechtes Jacobifeld mit $J(0) = 0$. Definiere $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ durch $f(t) := \frac{1}{2}|J(t)|^2$. Dann gilt $\dot{f} = \langle \dot{J}, J \rangle$ und weiter

$$\ddot{f} = |\dot{J}|^2 + \langle \ddot{J}, J \rangle = |\dot{J}|^2 - \underbrace{\langle R(J, \dot{c})\dot{c}, J \rangle}_{=K(J, \dot{c}) \cdot |J|^2 \leq 0} \geq |\dot{J}|^2$$

Mit $J(0) = 0$ und $\dot{J}(0) \neq 0$ folgt hieraus zunächst für alle $t \in (0, \infty)$ die Abschätzung

$$\dot{f}(t) \geq \int_0^t |\dot{J}(s)|^2 ds > 0$$

und eine weitere Integration ergibt wegen $f(0) = 0$ schließlich $f(t) > 0$. \square

2.3. Nichtpositive Schnittkrümmung und Überlagerungen

Aus dieser Beobachtung werden starke Einschränkungen an M folgen. Für diese zeigen wir zunächst, dass die Exponentialabbildung eine sogenannte *Überlagerung* ist.

Definition 2.16. Eine surjektive glatte Abbildung $F : N \rightarrow M$ zwischen zwei glatten Mannigfaltigkeiten M und N heißt (*glatte*) *Überlagerung*, falls für jedes $p \in M$ eine offene Umgebung $U \subset M$ mit folgenden Eigenschaften existiert:

(U1) Es gilt $F^{-1}(U) = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} V_\alpha$ mit offenen, disjunkten Mengen $V_\alpha \subset E$.

(U2) Für jedes $\alpha \in \Lambda$ ist $F|_{V_\alpha} : V_\alpha \rightarrow U$ ein Diffeomorphismus.

Tragen N und M Riemannsche Metriken h und g , so nennt man F *Riemannsche Überlagerung*, falls zusätzlich $h = F^*g$ gilt.²

Eine Überlagerung ist stets ein lokaler Diffeomorphismus, umgekehrt braucht ein lokaler Diffeomorphismus aber keine Überlagerung zu sein. Ein einfaches Gegenbeispiel ist etwa $F : (0, 2) \rightarrow S^1$ mit $F(\theta) = e^{2\pi i \theta}$. Ebenso ist eine Riemannsche Überlagerung stets eine lokale Isometrie und die Umkehrung schlägt im Allgemeinen wieder fehl. Unter der zusätzlichen Annahme, dass der Definitionsbereich *vollständig* ist, ändert sich dies.

Lemma 2.17. *Seien N und M zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeiten und $F : N \rightarrow M$ eine lokale Isometrie. Ist N vollständig, so ist es auch M und F ist eine Überlagerung.*

Beweis. Wir zeigen zunächst folgende Hilfsaussage:

Hilfsaussage (H): Sei $c : [0, b) \rightarrow M$ eine Geodäte mit $p := c(0)$. Für jedes $x \in F^{-1}(\{p\})$ existiert genau eine Geodäte $\tilde{c} : [0, b) \rightarrow N$ mit $\tilde{c}(0) = x$ und $c = F \circ \tilde{c}$. Diese ist durch $D_x F(\tilde{c}(0)) = \dot{c}(0)$ eindeutig bestimmt. Wir nennen \tilde{c} den eindeutige *Lift* von c mit $\tilde{c}(0) = x$.

Da F eine lokale Isometrie ist, bildet F Geodäten in N auf solche in M ab. Da andererseits eine Geodäte eindeutig durch ihre Anfangsgeschwindigkeit festgelegt ist, muss F die Geodäte \tilde{c} mit $\tilde{c}(0) = (D_x F)^{-1}(\dot{c}(0))$ wieder auf c abbilden. Dass beide Geodäten gleich lang existieren müssen folgt daraus, dass F ein lokaler Diffeomorphismus ist.

Nun beweisen wir die eigentliche Aussage in drei Schritten.

1. Schritt: Vollständigkeit von M

Wähle $x \in N$ und setze $p := F(x) \in M$. Aus (H) folgt, dass $\exp_p = F \circ \exp_x \circ (D_x F)^{-1} : T_p M \rightarrow M$ gilt. Da \exp_x auf ganz $T_x M$ definiert ist, ist somit auch \exp_p auf ganz $T_p M$ definiert. Also ist M vollständig in p und somit nach Hopf-Rinow insgesamt vollständig.

2. Schritt: Surjektivität von F

Sei $q \in M$. Wähle $x \in N$ und setze $p := F(x)$. Da M vollständig ist, existiert nach Hopf-Rinow eine minimierende, nach BL parametrisierte Geodäte $c : [0, b] \rightarrow M$ von p nach q . Sei \tilde{c} deren Lift mit $\tilde{c}(0) = x$. Dann folgt $F(\tilde{c}(b)) = c(b) = q$. Also gilt $q \in \text{im}(F)$.

²In diesem Fall ist die Metrik h auf N schon eindeutig durch g festgelegt ist, da F ja insbesondere ein lokaler Diffeomorphismus ist und folglich $h = F^*g$ als Definition von h verstanden werden kann.

2. Jacobifelder und die zweite Variation der Bogenlänge

3. Schritt: Geodätische Bälle sind gleichmäßig überlagert (somit ist F Überlagerung)

Sei $p \in M$. Setze $U := B(p, \varepsilon)$ für ein hinreichend kleines $\varepsilon > 0$, sodass der Ball geodätisch ist. Für $x \in F^{-1}(\{p\})$ setze $V_x := B(x, \varepsilon)$.

Wir zeigen zunächst $F^{-1}(U) = \bigcup_{x \in F^{-1}(\{p\})} V_x$. Sei einerseits $y \in F^{-1}(U)$ gegeben. Setze $q := F(y) \in U$ und wähle eine minimierende Geodäte $c : [0, b] \rightarrow U$ von q nach p . Sei \tilde{c} deren Lift mit $\tilde{c}(0) = y$. Dann gilt $F(\tilde{c}(b)) = c(b) = p$, also $z := \tilde{c}(b) \in F^{-1}(\{p\})$ und folglich $d(y, z) \leq L(\tilde{c}) = L(c) < \varepsilon$, wobei die Längen der Kurven identisch sind, da F eine lokale Isometrie ist. Also gilt $y \in V_z$. Umgekehrt seien $x \in F^{-1}(\{p\})$ und $y \in V_x$ gegeben. Wähle eine minimierende Geodäte $\tilde{c} : [0, 1] \rightarrow N$ von x nach y . Dann ist $c := F \circ \tilde{c}$ eine Geodäte von p nach $F(y)$ mit $L(c) = L(\tilde{c}) < \varepsilon$. Somit gilt $F(y) \in U$, also gilt $y \in F^{-1}(U)$.

Als nächstes zeigen wir, dass $V_x \cap V_y = \emptyset$ gilt für $x, y \in F^{-1}(\{p\})$ mit $x \neq y$. Wähle dazu eine minimierende Geodäte $\tilde{c} : [0, b] \rightarrow N$ von x nach y . Dann ist $c := F \circ \tilde{c}$ eine (nichtkonstante) Geodäte in M , die von p nach p läuft. Diese muss den geodätischen Ball $B(p, \varepsilon)$ verlassen und wieder zurückkehren (denn sie ist ja eine radiale Geodäte). Somit gilt $L(\tilde{c}) = L(c) \geq 2\varepsilon$, wobei die erste Gleichheit gilt, da F eine lokale Isometrie ist. Mit der Dreiecksungleichung folgt $V_x \cap V_y = \emptyset$.

Es bleibt zu zeigen, dass $F|_{V_x}$ für jedes $x \in F^{-1}(\{p\})$ ein Diffeomorphismus nach U ist. Da F ein lokaler Diffeomorphismus ist, muss lediglich Bijektivität gezeigt werden. Sei dazu $x \in F^{-1}(\{p\})$ gegeben. Für die Injektivität seien $y, z \in V_x$ mit $F(y) = F(z) =: q$ gegeben. Wählt man minimierende Geodäten \tilde{c}_1 und \tilde{c}_2 von x nach y bzw. z und setzt $c_1 := F \circ \tilde{c}_1$ und $c_2 := F \circ \tilde{c}_2$, so gilt $L(c_1) = L(\tilde{c}_1) < \varepsilon$ und ebenso $L(c_2) < \varepsilon$. Deshalb liegen die Bilder von c_1 und c_2 beide in U , es handelt sich also bei beiden um radiale Geodäten von p nach q . Damit müssen diese aber identisch sein und zudem dieselbe Länge haben. Damit folgt aber auch $\tilde{c}_1 = \tilde{c}_2$, da beides (geodätische) Lifts sind (beachte auch, dass beide dieselbe Länge haben müssen). Hieraus folgt $y = z$, also ist $F|_{V_x}$ injektiv. Die Surjektivität kann man ähnlich wie im zweiten Schritt begründen. \square

Bevor wir dies gleich auf die Exponentialabbildung anwenden, zitieren wir noch ein Resultat aus der Theorie der Überlagerungen, das uns noch stärkere Aussagen erlaubt.

Proposition 2.18. *Seien N und M zusammenhängende Mannigfaltigkeiten und sei $F : N \rightarrow M$ eine glatte Überlagerung. Ist M einfach zusammenhängend, so ist F injektiv und damit schon ein Diffeomorphismus.*

Beweisskizze. Seien $x, y \in N$ mit $F(x) = F(y) =: p$. Da N zusammenhängend ist, existiert eine Kurve $c : [0, 1] \rightarrow N$ von x nach y . Dann ist die Kurve $F \circ c : [0, 1] \rightarrow M$ eine Schleife im Punkt $p \in M$. Da M einfach zusammenhängend ist, ist $F \circ c$ homotop mit festen Endpunkten zur konstanten Schleife. Da sich Homotopien stets liften lassen (da wir das hier nicht beweisen, ist es nur eine Beweisskizze), ist somit auch c homotop mit festen Endpunkten zu einer konstanten Kurve. Damit muss aber $x = y$ gelten. \square

Korollar 2.19. *Sei (M, g) vollständig und $p \in M$. Hat \exp_p keine kritischen Punkte, so ist $\exp_p : T_p M \rightarrow M$ eine Überlagerung. Ist M zusätzlich einfach zusammenhängend, so ist $\exp_p : T_p M \rightarrow M$ sogar ein Diffeomorphismus.*

2.4. Zweite Variation der Bogenlänge, positive Krümmung und Kompaktheit

Beweis. Hat \exp_p keine kritischen Punkte, so ist zunächst $\bar{g} := \exp_p^* g$ eine Riemannsche Metrik auf $T_p M$. Per Konstruktion ist damit \exp_p eine lokale Isometrie. Wir zeigen, dass \bar{g} vollständig ist, dann folgt die Behauptung aus Lemma 2.17 und Proposition 2.18.

Da \exp_p eine lokale Isometrie ist, bildet \exp_p \bar{g} -Geodäten auf g -Geodäten ab. Da andererseits die (linear parametrisierten) Ursprungsgeraden in $T_p M$ von \exp_p auf die Geodäten durch p in M abgebildet werden, sind diese genau die durch 0_p verlaufenden \bar{g} -Geodäten. Folglich ist \bar{g} vollständig (in 0_p und somit insgesamt). \square

Die Kombination von Lemma 2.15 und Korollar 2.19 ergibt direkt folgendes Theorem.

Theorem 2.20 (Cartan-Hadamard). *Sei M zusammenhängend und vollständig und erfülle $K \leq 0$. Dann ist $\exp_p : T_p M \rightarrow M$ für jedes $p \in M$ eine Überlagerung. Ist M einfach zusammenhängend, so ist \exp_p sogar ein Diffeomorphismus und damit M diffeomorph zu \mathbb{R}^n . (Allgemeiner gilt dies stets für die universelle Überlagerung von M).*

Beweis. Bis auf den Zusatz in Klammern folgt das direkt aus Lemma 2.15 und Korollar 2.19. Für den Zusatz muss man lediglich wissen, dass die universelle Überlagerung \widetilde{M} von M per Definition einfach zusammenhängend ist. Da nämlich beim Zurückziehen einer Metrik punktweise Krümmungsschranken erhalten bleiben, kann man das Theorem auch auf \widetilde{M} anwenden. \square

Bemerkung 2.21. Da $T_p M$ einfach zusammenhängend ist, ist in der Situation von Korollar 2.19 bzw. Theorem 2.20 also $\exp_p : T_p M \rightarrow M$ eine universelle Überlagerung.

Ende der
siebten
Vorlesung
(3.12.)

2.4. Zweite Variation der Bogenlänge, positive Krümmung und Kompaktheit

Wie das Beispiel der Sphäre zeigt, hat die Exponentialabbildung bei positiver Krümmung möglicherweise Singularitäten. Wir müssen hier insofern „umgekehrt“ argumentieren als in negativer Krümmung und benötigen ein Werkzeug, das uns Schlüsse hierauf erlaubt.

Satz 2.22 (Zweite Variation der Bogenlänge). *Seien $c : [a, b] \rightarrow M$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Geodäte und $\sigma : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [a, b] \rightarrow M$ eine stückweise glatte Variation von c mit „Knickstellen“ bei $t_1, \dots, t_k \in (a, b)$, Variationsvektorfeld $V := \partial_s \sigma(0, \cdot)$ und „transversaler Beschleunigung“ $A := (\nabla_{\partial_s}^\sigma \partial_s \sigma)(0, \cdot)$. Dann gilt*

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{ds^2} \Big|_{s=0} \ell(\sigma_s) &= \int_a^b \left[\langle \dot{V}^\perp(t), \dot{V}^\perp(t) \rangle - \langle R(V(t), \dot{c}(t)) \dot{c}(t), V(t) \rangle \right] dt + \langle \dot{c}(t), A(t) \rangle \Big|_a^b \\ &= - \int_a^b \left\langle \ddot{V}^\perp(t) + R(V^\perp(t), \dot{c}(t)) \dot{c}(t), V^\perp(t) \right\rangle dt \\ &\quad - \sum_{i=1}^k \left\langle \Delta \dot{V}^\perp(t_i), V^\perp(t_i) \right\rangle + \left\langle \dot{V}^\perp(t), V^\perp(t) \right\rangle \Big|_a^b + \langle \dot{c}(t), A(t) \rangle \Big|_a^b, \end{aligned} \tag{2.6}$$

2. Jacobifelder und die zweite Variation der Bogenlänge

wobei $\Delta\dot{V}^\perp(t_i) := \dot{V}^\perp(t_i^+) - \dot{V}^\perp(t_i^-)$ und \perp jeweils den zu \dot{c} senkrechten Anteil bezeichnet.

Beweis. Übungsaufgabe. □

Die rechte Seite von (2.6) ist quadratisch im Variationsvektorfeld und stellt zumindest intuitiv betrachtet die „Hesse-Form“ des Bogenlängenfunctionals in einem kritischen Punkt (einer Geodäte) dar. Auf jeden Fall kann eine Geodäte, für welche eine Variation existiert, sodass (2.6) negativ ist, nicht minimierend sein. Es ist günstig, folgende Abkürzung einzuführen.

Definition 2.23. Die *Indexform* $I : \Gamma^\infty(c^*TM) \times \Gamma^\infty(c^*TM) \rightarrow \mathbb{R}$ einer Geodäte $c : [a, b] \rightarrow M$ ist definiert durch

$$I(X, Y) := \int_a^b \left[\langle \dot{X}, \dot{Y} \rangle - \langle R(X, \dot{c})\dot{c}, Y \rangle \right] dt. \quad (2.7)$$

Mit der zweite Variation lässt beweisen, dass Geodäten unter gewissen Umständen zu minimierend aufhören.

Satz 2.24 (Jacobi). *Sei $c : [a, b] \rightarrow M$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Geodäte. Ist ein $t_0 \in (a, b)$ längs c zu a konjugiert, so ist c nicht minimierend. Also minimiert keine Geodäte über den ersten konjugierten Punkt hinaus (sofern ein solcher existiert).*

Beweis. Sei $J : [a, t_0] \rightarrow TM$ ein nichttriviales Jacobifeld längs c mit $J(a) = 0$ und $J(t_0) = 0$. Definiere ein „Jacobifeld mit Knick“ $Y : [a, b] \rightarrow M$ durch

$$Y(t) := \begin{cases} J(t) & t \leq t_0, \\ 0 & t > t_0. \end{cases}$$

Da J nichttrivial ist, gilt $\dot{J}(t_0) \neq 0$ und somit können wir $X \in \Gamma^\infty(c^*TM)$ wählen mit

$$X(a) = 0, \quad X(b) = 0, \quad \langle \dot{J}(t_0), X(t_0) \rangle < 0. \quad (*)$$

Für ein noch näher zu spezifizierendes $\varepsilon > 0$ setze $Z := Y + \varepsilon X$. Dieses bzw. die zugehörige Variation $\sigma(s, t) = \exp_{c(t)}(sZ(t))$ setzen wir in die Formel (2.6) für die zweite Variation der Bogenlänge ein. Da Y ein Jacobifeld mit einer Knickstelle ist, verschwinden die zugehörigen Integrale und es bleibt (beachte, dass die zweite Variation eine quadratische Form des Variationsvektorfelds ist)

$$\left. \frac{d^2}{ds^2} \right|_{s=0} \ell(\sigma_s) = -\varepsilon \left\langle \Delta\dot{Y}^\perp(t_0), X(t_0) \right\rangle + \varepsilon^2 I(X, X) = \varepsilon \left(\langle \dot{J}(t_0), X(t_0) \rangle + \varepsilon I(X, X) \right).$$

Wegen (*) ist dies für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ negativ. Somit kann c nicht minimierend sein. □

Im letzten Satz haben wir den Krümmungsterm in der zweiten Variation nicht explizit benutzt, da wir Jacobifelder benutzt haben. Im folgenden Lemma machen wir explizit von diesem Gebrauch.

2.4. Zweite Variation der Bogenlänge, positive Krümmung und Kompaktheit

Lemma 2.25 (Bonnet 1855, Synge 1926, Myers 1941). *Sei $\kappa > 0$ gegeben. Die Schnittkrümmung von (M, g) erfülle $K \geq \kappa > 0$. Dann ist kein Geodätenstück der Länge größer als $\pi/\sqrt{\kappa}$ minimierend. Dieselbe Schlussfolgerung gilt unter der schwächeren Voraussetzung $\text{Ric} \geq (n-1)\kappa g$ (mit $n = \dim M$).*

Beweis. Gelte zunächst $K \geq \kappa > 0$. Sei $c : [0, L] \rightarrow M$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Geodäte mit $L > \pi/\sqrt{\kappa}$. Definiere $V \in \Gamma^\infty(c^*TM)$ durch

$$V(t) = \sin(\pi/L \cdot t)E(t),$$

wobei $E \in \Gamma^\infty(c^*TM)$ ein beliebiges zu \dot{c} senkrechtes paralleles Einheitsvektorfeld ist. Es gilt $\dot{V}(t)^\perp = \pi/L \cdot \cos(\pi/L \cdot t)E(t)$, da E parallel und senkrecht zu \dot{c} ist. Wegen $V(0) = 0$ und $V(L) = 0$ hat die zugehörige Variation $\sigma(s, t) := \exp_{c(t)}(s \cdot V(t))$ feste Endpunkte (dieselben wie c) und somit ist die transversale Beschleunigung in diesen Null. Aus der Formel (2.6) für die zweite Variation der Bogenlänge folgt somit:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{ds^2} \Big|_{s=0} \ell(\sigma_s) &= \int_0^L \underbrace{\langle \dot{V}^\perp(t), \dot{V}^\perp(t) \rangle}_{=(\pi/L)^2 \sin^2(\pi/L \cdot t)} dt - \int_0^L \underbrace{\langle R(V(t), \dot{c}(t))\dot{c}(t), V(t) \rangle}_{\geq \kappa |\dot{c}(t)|^2 |V(t)|^2} dt \\ &\leq (\pi/L)^2 \int_0^L \sin^2(\pi/L \cdot t) dt - \kappa \int_0^L \cos^2(\pi/L \cdot t) dt \\ &< \kappa \int_0^L \sin^2(\pi/L \cdot t) dt - \kappa \int_0^L \cos^2(\pi/L \cdot t) dt \\ &= 0. \end{aligned}$$

Im vorletzten Schritt wurde verwendet, dass $L > \pi/\sqrt{\kappa}$ gilt und der letzte Schritt folgt einfach, da über eine halbe Periode integriert wird. Da σ wie schon bemerkt eine Variation von c mit festen Endpunkten ist, kann c somit nicht minimieren.

Die Erweiterung auf die Ricci-Krümmung wird als Übungsaufgabe überlassen. □

Theorem 2.26 (Hopf-Rinow 1931, Myers 1932/1941). *Sei $\kappa > 0$ und sei (M^n, g) eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit, deren Schnittkrümmung $K \geq \kappa > 0$ erfüllt. Dann ist M kompakt und es gilt $\text{diam}(M, g) \leq \pi/\sqrt{\kappa} = \text{diam}M_\kappa^n$.*

Dieselbe Folgerung gilt auch unter der Annahme, dass $\text{Ric} \geq (n-1)\kappa > 0$ gilt.

In beiden Fällen folgt weiter, dass die Fundamentalgruppe von M endlich ist.

Beweis. Aufgrund der Vollständigkeit lassen sich nach Hopf-Rinow je zwei Punkte durch eine minimierende Geodäte verbinden. Nach dem letzten Lemma kann deren Länge höchstens $\pi/\sqrt{\kappa}$ sein. Hieraus folgt $\text{diam}(M, g) \leq \pi/\sqrt{\kappa}$, woraus nach Hopf-Rinow die Kompaktheit folgt.

Die Aussage über die Fundamentalgruppe folgt so: Die (punktweise) Krümmungsschranke überträgt sich ebenso wie die Vollständigkeit auf die universelle Riemannsche Überlagerung von M . Also ist auch diese kompakt. Hieraus folgt die Endlichkeit der Fundamentalgruppe. □

2.5. Konstante Krümmung und Modellräume II

Theorem 2.27 (Charakterisierung der Modellräume). *Sei (M, g) eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit konstanter Krümmung $\kappa \in \mathbb{R}$ und Dimension $n \geq 2$. Ist M einfach zusammenhängend, so ist (M, g) isometrisch zu M_κ^n . (Allgemeiner gilt dies stets für die universelle Riemannsche Überlagerung von M .)*

Beweis für $\kappa \leq 0$. Fixiere $p \in M$. Nach dem Theorem 2.20 (Cartan-Hadamard) ist $\exp_p : T_p M \rightarrow M$ ein Diffeomorphismus. Also sind Normalkoordinaten in p ein *globales* Koordinatensystem auf M . In diesen (bzw. den zugehörigen Polarkoordinaten) hat g die Form wie in Theorem 2.14. Da dasselbe auch in M_κ^n gilt (für einen beliebig fixierten Punkt), liefert die Wahl von Normalkoordinaten also die gewünschte Isometrie. \square

Ende der
achten
Vorlesung
(10.12.)

Beweis für $\kappa > 0$. Fixiere wieder einen Punkt $p \in M$ und sei $x \in M_\kappa^n$ der Nordpol. Dann ist $\exp_x : B(0_x, \pi/\sqrt{\kappa}) \rightarrow M_\kappa^n \setminus \{-x\}$ ein Diffeomorphismus und die zurückgezogene Metrik hat (in Polarkoordinaten) die Form (2.5). Ebenso ist $\exp_p : B(0_p, \pi/\sqrt{\kappa}) \rightarrow M$ ein lokaler Diffeomorphismus und die zurückgezogene Metrik hat (in Polarkoordinaten) auch die Form (2.5). Wählen wir eine lineare Isometrie $L : T_x M_\kappa^n \rightarrow T_p M$, so ist folglich

$$F := \exp_p \circ L \circ \exp_x^{-1} : M_\kappa^n \setminus \{-x\} \rightarrow M$$

eine lokale Isometrie. Wir setzen diese wie folgt auf ganz M_κ^n fort: Wähle $y \in M_\kappa^n \setminus \{x, -x\}$ und setze $q := F(y)$ sowie $L' := D_y F$. Definiere nun

$$F' := \exp_q \circ L' \circ \exp_y^{-1} : M_\kappa^n \setminus \{-y\} \rightarrow M.$$

Auch F' ist wieder eine lokale Isometrie. Am Punkt y gilt

$$F'(y) = q = F(y), \quad D_y F' = L' = D_y F.$$

Da F und F' lokale Isometrien sind, folgt hieraus, dass die beiden auf dem (zusammenhängenden) Schnitt ihrer Definitionsbereiche $M_\kappa^n \setminus \{x, -x, y, -y\}$ übereinstimmen (Beweis: Übungsaufgabe). Damit setzen sich die beiden aber zu einer lokalen Isometrie $\Phi : M_\kappa^n \rightarrow M$ zusammen. Da M_κ^n vollständig ist, ist Φ nach Lemma 2.17 eine Überlagerung. Und da M einfach zusammenhängend ist, ist Φ nach Proposition 2.18 injektiv und somit eine Isometrie. \square

Bemerkung 2.28. Verzichtet man auf die Voraussetzung, dass M einfach zusammenhängend ist, erhält man mit dem Beweis immer noch eine Riemannsche Überlagerung $\Phi : M_\kappa^n \rightarrow M$. Einige Anmerkungen dazu, was man in dieser Situation weiter sagen kann, sind im Vorlesungsskript [3] auf Seite 49 zu finden.

2.6. Der Schnittpunkt: Wo Geodäten zu minimieren aufhören

Zum Abschluss dieses Kapitels kehren wir nochmals zurück zur ersten Frage der Vorlesung: Welche Kurven minimieren Abstände? Wir haben gesehen, dass minimierende Kurven stets Stücke von Geodäten sind. Weiter sind hinreichend kurze solche Stücke stets minimierend (wobei „hinreichend kurz“ von der Geodäte abhängen), lange Geodätenstücke aber nicht unbedingt minimieren (bzw. sogar ganz sicher nicht falls die Krümmung positiv ist). Wir studieren nun ganz allgemein (unter Voraussetzung von Vollständigkeit), unter welchen Umständen eine Geodäte aufhört zu minimieren.

Proposition 2.29. *Seien (M, g) vollständig, $v \in T_p M$ mit $|v| = 1$ und $t_0 \in (0, \infty)$. Setze*

$$s(v) := \sup\{t > 0 : d(c_v(t), c_v(0)) = t\} \in (0, \infty]. \quad (2.8)$$

Gilt $s(v) = t_0$ (also $s(v) < \infty$), so gilt eine der folgenden beiden Aussagen:

(i) *Es gibt eine von c_v verschiedene minimierende Geodäte von p nach $c_v(t_0)$.*

(ii) *t_0 ist der erste zu 0 längs c_v konjugierte Punkt.*

Gilt umgekehrt eine dieser beiden Aussagen, so gilt $s(v) \leq t_0$.

Beweis. Gelte zunächst $s(v) = t_0$.

Wähle eine monoton fallende Nullfolge $(\varepsilon_n)_n$ und (mit Hopf-Rinow) für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine nach Bogenlänge parametrisierte minimierende Geodäte $c_n : [0, b_n] \rightarrow M$ von p nach $c_v(t_0 + \varepsilon_n)$. Nach Definition von $s(v)$ folgt $b_n = L(c_n) < t_0 + \varepsilon_n$. Setze $w_n := \dot{c}_n(0)$. Dann gilt $|w_n| = 1$ und nach Übergang zu einer Teilfolge können wir annehmen, dass $w_n \rightarrow w \in S_p M$. Aus Stetigkeitsgründen folgt $c_w(t_0) = c_v(t_0)$ und c_w minimiert den Abstand zwischen p und $c_v(t_0)$. Gilt $c_v \neq c_w$, so gilt (i). Betrachte nun den Fall, dass $c_v = c_w$ gilt. Nach Konstruktion gilt $b_n w_n \neq (t_0 + \varepsilon_n)v$ aber $\exp_p(b_n w_n) = \exp_p((s(v) + \varepsilon_n)v)$. Wegen $b_n w_n \rightarrow t_0 v$ und $(t_0 + \varepsilon_n)v \rightarrow t_0 v$ kann somit \exp_p nicht injektiv nahe $t_0 v$ sein. Also ist $t_0 v$ ein kritischer Punkt und somit gilt (ii).

Wir haben in Satz 2.24 schon gesehen, dass $s(v) \leq t_0$ gilt, falls (ii) gilt. Es bleibt zu zeigen, dass auch aus (i) schon $s(v) \leq t_0$ folgt. Sei dazu $c_w : [0, t_0] \rightarrow M$ eine andere minimierende Geodäte von $c_v(0)$ nach $c_v(t_0)$. Angenommen es gilt $s(v) > t_0$. Dann existiert $\varepsilon > 0$ so, dass $c_v : [0, t_0 + \varepsilon] \rightarrow M$ immer noch minimiert. Wegen $\ell(c_w|_{[0, t_0]}) = \ell(c_v|_{[0, t_0]})$ ist dann aber auch die Kurve $c : [0, t_0 + \varepsilon] \rightarrow M$ mit

$$c(t) := \begin{cases} c_w(t) & t \in [0, t_0] \\ c_v(t) & t \in [t_0, t_0 + \varepsilon] \end{cases}$$

minimierend. Wegen $c_v \neq c_w$ gilt $\dot{c}_v(t_0) \neq \dot{c}_w(t_0)$ (Eindeutigkeit von Geodäten) und somit ist c nicht glatt, insbesondere also keine Geodäte. Dies ist aber ein Widerspruch dazu, dass c minimierend ist. Somit muss doch $s(v) \leq t_0$ gelten. \square

Definition 2.30 (Schnittpunkt und Injektivitätsradius). Sei (M, g) eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit und $SM := \{v \in TM : |v| = 1\}$. Die durch (2.8) definierte Funktion $s : SM \rightarrow [0, \infty]$ wird *Schnittpunkt* genannt. Weiter definieren wir:

2. Jacobifelder und die zweite Variation der Bogenlänge

- den *tangentialen Schnittort* von M : $C := \{s(v)v : v \in SM, s(v) < \infty\} \subset TM$,
- den *tangentialen Schnittort* von $p \in M$: $C_p := C \cap T_pM \subset T_pM$,
- den *Schnittort* von $p \in M$: $C(p) := \exp_p(C_p) \subset M$,
- den *Injektivitätsradius* von $p \in M$: $\rho(p) := \inf_{v \in S_pM} s(v) \in (0, \infty]$,
- den *Injektivitätsradius* von M : $\rho(M) := \inf_{p \in M} \rho(p) \in [0, \infty]$.

Proposition 2.31. *Die Schnittfunktion $s : SM \rightarrow [0, \infty]$ ist stetig und für jedes $p \in M$ ist $C(p) \subset M$ abgeschlossen.*

Beweis. Wir prüfen Folgenstetigkeit. Sei dazu $(v_n)_n$ eine Folge in SM mit $v_n \rightarrow v \in SM$.

1. Schritt: Wir zeigen $\limsup_{n \rightarrow \infty} s(v_n) \leq s(v)$:

Gilt $s(v) = \infty$, so ist nichts zu zeigen. Betrachte also nun den Fall $s(v) < \infty$. Angenommen die Behauptung ist falsch. Dann existiert $\varepsilon > 0$ und unendliche viele $n \in \mathbb{N}$ mit $s(v_n) > s(v) + \varepsilon$. Für diese $n \in \mathbb{N}$ ist c_{v_n} auf $[0, s(v) + \varepsilon]$ minimierend, d.h. es gilt $d(c_{v_n}(0), c_{v_n}(s(v) + \varepsilon)) = s(v) + \varepsilon$. Da die linke Seite stetig in v_n ist, folgt $d(c_v(0), c_v(s(v) + \varepsilon)) = s(v) + \varepsilon$. Dies widerspricht der Definition von $s(v)$.

2. Schritt: Wir zeigen $\liminf_{n \rightarrow \infty} s(v_n) \geq s(v)$:

Wiederum ist nur im Fall $s^* := \liminf_{n \rightarrow \infty} s(v_n) < \infty$ etwas zu zeigen. Nach Übergang zu einer Teilfolge (die gegen den Limes inferior konvergiert), können wir zudem annehmen, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} s(v_n) = s^*$. Unter Verwendung von Proposition 2.29 können wir folgende beiden Fälle unterscheiden:

1. *Fall:* Für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ ist t_n längs c_{v_n} zu 0 konjugiert und somit $s(v_n)v_n$ ein kritischer Punkt von $\pi \times \exp$. Wegen $s(v_n)v_n \rightarrow s^*v$ ist damit auch s^*v kritischer Punkt von $\pi \times \exp$ (da Invertierbarkeit eine offene Bedingung ist). Also ist s^* längs c_v konjugiert zu 0 und somit folgt $s(v) \leq s^*$, wiederum nach Proposition 2.29.

2. *Fall:* Für unendliche viele $n \in \mathbb{N}$ gibt es neben c_{v_n} noch eine andere nach Bogenlänge parametrisierte minimierende Geodäte $c_{w_n} : [0, s(v_n)] \rightarrow M$ von $c_{v_n}(0)$ nach $c_{v_n}(s(v_n))$. Ausgehend davon kann man nun analog argumentieren wie im Beweis von Proposition 2.29 argumentieren und schlussfolgern, dass $s(v) \leq s^*$ gilt.

Die Abgeschlossenheit von $C(p)$ ist eine direkte Folgerung der Stetigkeit von s . \square

Satz 2.32. *Sei M ein vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit und $p \in M$. Dann ist $U := \{tv : v \in S_pM, 0 \leq t < s(v)\} \subset T_pM$ eine sternförmige offene Umgebung von 0_p und wird durch \exp_p diffeomorph auf $M \setminus C(p)$ abgebildet. Weiter gilt $\exp_p(\overline{U}) = M$.*

Beweis. Dass $U \subset T_pM$ eine offene, sternförmige Umgebung von 0_p ist, ist weitestgehend klar (Übung). Weiter folgt aus Proposition 2.29, dass \exp_p auf U injektiv und ein lokaler Diffeomorphismus ist, somit also ein Diffeomorphismus auf $\exp_p(U) \subset M$. Dass $\exp_p(U)$ gleich $M \setminus C_p$ ist, folgt im Wesentlichen direkt aus der Definition von C_p bzw. s (Übung).

Dass auch $\exp_p(\overline{U}) = M$ gilt, folgt daraus, dass sich jeder Punkt durch eine minimierende Geodäte mit p verbinden lässt, die entweder über q hinaus noch minimiert (dann $q \notin C_p$) oder nicht (dann $q \in C_p$). \square

2.6. Der Schnittpunkt: Wo Geodäten zu minimieren aufhören

Nach diesem Satz gilt folgende bemerkenswerte Beobachtung: Abgesehen von $C(p)$ lässt sich ganz M durch *eine* Karte überdecken. Man kann zeigen, dass $C(p)$ eine Nullmenge ist, insofern lässt sich also ein „großer Teil“ von M durch eine Karte überdecken. Ist M kompakt, so ist die Menge U aus dem Satz in einem Ball enthalten und somit selbst homöomorph zu einem offenen Ball (da sternförmig). Die gesamte Topologie von M steckt also im Schnittpunkt und entsteht durch geeignete „Identifizierungen“ von Randpunkten eines Balles (nämlich wo die Geodäten wieder eintreten, die an anderer Stelle hinauslaufen).

Ende der
neunten
Vorlesung
(17.12.)

Zum Abschluss dieses kurzen Abschnitts zeigen wir noch einen interessanten Satz.

Satz 2.33 (Klingenberg). *Sei $q \in C(p)$ mit $d(p, q) = d(p, C(p)) = \inf_{z \in C(p)} d(p, z)$. Dann gilt eine der folgenden Aussagen:*

- (i) q ist zu p konjugiert längs einer kürzesten Geodätischen von p nach q .
- (ii) Es gibt genau zwei minimierende Geodäten $c_1, c_2 : [0, 1] \rightarrow M$ von p nach q . Für diese gilt $\dot{c}_1(1) = -\dot{c}_2(1)$, d.h. c_1 und c_2 bilden eine „geodätische Schleife“ in p .

Beweis. Angenommen (i) gilt nicht. Nach Proposition 2.29 existieren dann zwei verschiedene minimierende Geodäten $c_1, c_2 : [0, 1] \rightarrow M$ von p nach q . Wir möchten zeigen, dass $\dot{c}_1(1) = -\dot{c}_2(1)$ gilt. Zwecks Widerspruch nehmen wir an, dies sei falsch. Dann können wir $w \in T_q M$ wählen mit $\langle w, \dot{c}_1(1) \rangle < 0$ und $\langle w, \dot{c}_2(1) \rangle < 0$. Sei wie üblich c_w die Geodäte mit $c_w(0) = p$ und $\dot{c}_w(0) = w$.

Für $i \in \{1, 2\}$ gilt:

Da q nicht längs c_i zu p konjugiert ist, ist $\dot{c}_i(0)$ ein regulärer Punkt von \exp_p , d.h. \exp_p ist ein Diffeomorphismus zwischen einer Umgebung von $\dot{c}_i(0)$ und q . Für $\varepsilon > 0$ hinreichend klein gibt es deshalb eine (eindeutige) glatte Kurve $V_i : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow T_p M$ mit $V_i(0) = \dot{c}_i(0)$ und $\exp_p(V_i(s)) = c_w(s)$ für alle $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Definiere eine Variation $\sigma_i : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [0, 1] \rightarrow M$ durch $\sigma_i(s, t) := \exp_p(tV_i(s))$. Dann ist σ_i eine geodätische Variation von c_i . Weiter gilt für beliebiges $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$:

$$\sigma_1(s, 1) = \exp_p(V_1(s)) = c_w(s) = \exp_p(V_2(s)) = \sigma_2(s, 1),$$

die beiden Kurven $\sigma_1(s, \cdot)$ und $\sigma_2(s, \cdot)$ haben also denselben Anfangs- und Endpunkt. Deshalb können diese beiden Geodäten nicht über diesen Endpunkt hinaus minimieren, eventuelle minimieren sie schon früher nicht mehr. In jedem Fall liegt auf mindestens einer von ihnen ein Punkt aus $C(p)$. Wir zeigen, dass dieser näher an p liegt als q , was dann einen Widerspruch zur Voraussetzung darstellt.

Nach der ersten Variationsformel gilt (da σ_i eine geodätische Variation mit festem Anfangspunkt ist)

$$\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \ell(\sigma_i(s, \cdot)) = \langle \dot{c}_i(1), w \rangle < 0.$$

Somit gilt $\ell(\sigma_i(s, \cdot)) < \ell(c_i) = d(p, q)$ für $s \in (0, \varepsilon)$ hinreichend klein. □

3. Intermezzo: Extrinsische Geometrie von Untermannigfaltigkeiten

Wir betrachten in diesem Kapitel stets die folgende Situation:

- (M, g) ist eine n -dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit.
- $P \subset M$ ist eine (eingebettete)¹ k -dimensionale Untermannigfaltigkeit.

Diese bedeutet (vgl. Def. 16.11 in [8]): Zu jedem Punkt $p \in M$ existiert eine Karte (U, x) von M um p mit $x(U \cap P) = x(U) \cap (\mathbb{R}^k \times \{0_{n-k}\})$. Man nennt eine solche Karte auch Untermannigfaltigkeitskarte zu $P \subset M$ um p . Die Einschränkungen solcher Karten auf P machen P selbst zu einer k -dimensionalen differenzierbaren Mannigfaltigkeit.

Die Einschränkung von g auf P macht P selbst zu einer Riemannschen Mannigfaltigkeit und wir werden in diesem Kapitel die verschiedenen Begrifflichkeiten der Riemannschen Geometrie auf M und auf P in Zusammenhang bringen. Dabei schreiben wir etwa ∇^M und R^M bzw. ∇^P bzw. R^P für den Levi-Civita Zusammenhang und Krümmungstensor von M bzw. P .

Neben diesen „intrinsischen“ Größen werden auch verschiedene „extrinsische“ geometrische Größen von $P \subset M$ eine Rolle spielen, für die also die konkrete Art und Weise wie P in M eingebettet ist eine Rolle spielen.

Da dieses Kapitel im Wesentlichen eine Begriffszusammenstellung ist, könnte es gut sein, dieses zunächst zu überfliegen und erst später auf die Details zurückzukommen, wenn diese wichtig werden.

3.1. Tangential- und Normalenbündel

Für jedes $p \in P$ gilt $T_p P \subset T_p M$. Wir setzen $N_p P := (T_p P)^\perp \subset T_p M$, dann gilt $T_p M = T_p P \oplus N_p P$ und wir haben die zugehörigen (orthogonalen) Projektionen

$$\tan_p : T_p M \rightarrow T_p P \quad \text{und} \quad \text{nor}_p : T_p M \rightarrow N_p P.$$

Ist $e_1, \dots, e_n \in T_p M$ eine Orthonormalbasis mit $e_1, \dots, e_k \in T_p P$ (damit automatisch $e_{k+1}, \dots, e_n \in N_p P$), so gilt für jedes $v \in T_p M$ wie aus der Linearen Algebra bekannt:

$$\tan_p(v) = \sum_{i=1}^k \langle v, e_i \rangle e_i \quad \text{und} \quad \text{nor}_p(v) = \sum_{i=k+1}^n \langle v, e_i \rangle e_i.$$

¹Die meisten, wenn nicht alle Aussagen sollten ebenso für immersierte Untermannigfaltigkeiten gelten.

3. Intermezzo: Extrinsische Geometrie von Untermannigfaltigkeiten

Diese punktweise Konstruktion lässt sich auf Bündelebene übertragen: Vermöge der Konstruktion aus Prop. A.2 sind die disjunkten Vereinigungen $TM|_P := \bigsqcup_{p \in P} T_p M$ und $NP := \bigsqcup_{p \in P} N_p P$ auf natürliche Weise Vektorbündel über P . Man nennt NP das *Normalenbündel* von $P \subset M$. Es gilt dann $TM|_P = TP \oplus NP$ und die obigen punktweisen (orthogonalen) Projektionen setzen sich zu Vektorbündelhomomorphismen $\tan : TM|_P \rightarrow TP$ und $\text{nor} : TM|_P \rightarrow NP$ zusammen.

Wir werden im nächsten beiden Abschnitten den Levi-Civita-Zusammenhang und den Krümmungstensor von M in tangentiale und normale Komponenten zerlegen. Dabei werden einerseits der Levi-Civita-Zusammenhang und der Krümmungstensor von P sowie andererseits verschiedene „extrinsische“ geometrische Größen eine Rolle spielen.

3.2. Die Zerlegung des Levi-Civita-Zusammenhangs

Zunächst schränken wir ∇^M wie folgt auf P ein: Definiere

$$\bar{\nabla} : \Gamma^\infty(TP) \times \Gamma^\infty(TM|_P) \rightarrow \Gamma^\infty(TM|_P) \text{ durch } (\bar{\nabla}_V X)_p := (\nabla_V^M \bar{X})_p, \quad (3.1)$$

wobei $\bar{X} \in \Gamma^\infty(TU)$ zu gegebenem $p \in M$ eine beliebig gewählte glatte Fortsetzung auf eine offene Umgebung von p in M ist.² Dies hängt nicht von der Wahl der Fortsetzung ab, da nur in P -Richtung abgeleitet wird. Genauer gilt in beliebigen lokalen Koordinaten x von M um p für eine beliebige lokale Fortsetzung \bar{X}

$$(\nabla_V^M \bar{X})_p = \left(V^i(p)(\partial_i \bar{X}^k)(p) + \Gamma_{ij}^k(p) V^i(p) \bar{X}^j(p) \right) \partial_k|_p$$

Wählt man die Koordinaten als Untermannigfaltigkeitskoordinaten, so würde einerseits wegen $V_p \in T_p P$ zunächst $V^{k+1}(p) = \dots = V^n(p) = 0$ gelten und andererseits würde für $i = 1, \dots, k$ auch $(\partial_i \bar{X}^k)(p) = (\partial_i X^k)(p)$ gelten. Deswegen gilt in diesen Koordinaten

$$(\nabla_V^M \bar{X})_p = \left(\sum_{i=1}^k V^i(p)(\partial_i X^k)(p) + \Gamma_{ij}^k(p) V^i(p) X^j(p) \right) \partial_k|_p$$

Proposition 3.1 (Induzierter Zusammenhang und zweite Fundamentalform). *Die Konstruktion (3.1) hängt nicht von der Wahl der Fortsetzung ab und definiert einen Zusammenhang auf $TM|_P$. Dieser hat die folgenden Eigenschaften:*

- (i) Für alle $V, W \in \Gamma^\infty(TP)$ gilt $\bar{\nabla}_V W - \bar{\nabla}_W V = [V, W]$.
- (ii) Für alle $V \in \Gamma^\infty(TP)$, $X, Y \in \Gamma^\infty(TM|_P)$ gilt $V \langle X, Y \rangle = \langle \bar{\nabla}_V X, Y \rangle + \langle X, \bar{\nabla}_V Y \rangle$.
- (iii) Für alle $V, W \in \Gamma^\infty(TP)$ gilt $\tan(\bar{\nabla}_V W) = \nabla_V^P W$.
- (iv) Die Abbildung $II : \Gamma^\infty(TP) \times \Gamma^\infty(TP) \rightarrow \Gamma^\infty(NP)$, die durch

$$II(V, W) := -\text{nor}(\bar{\nabla}_V W) = \nabla_V^P W - \bar{\nabla}_V W \quad (3.2)$$

definiert wird, ist ein symmetrisches Tensorfeld $II \in \Gamma^\infty(T^*P \otimes T^*P \otimes NP)$.

²Zum Beispiel setze man X in einer Untermannigfaltigkeitskarte „konstant“ fort.

3.2. Die Zerlegung des Levi-Civita-Zusammenhangs

(v) Die Abbildung $\nabla^N : \Gamma^\infty(TP) \times \Gamma^\infty(NP) \rightarrow \Gamma^\infty(NP)$, die durch

$$\nabla_V^N Z := \text{nor}(\bar{\nabla}_V Z) \quad (3.3)$$

definiert wird, ist ein metrischer Zusammenhang auf NP .

Beweis. Die Unabhängigkeit von der Wahl der lokalen Fortsetzung wurde schon gezeigt. Die übrigen Eigenschaften folgen direkt aus denen des Levi-Civita-Zusammenhangs von M und können leicht nachgerechnet werden (Übung). \square

Bemerkung 3.2 (Berechnung von $\bar{\nabla}$ über Ableitungen längs Kurven). Für $M = \mathbb{R}^n$ gilt $(\bar{\nabla}_V X)_p = \frac{d}{dt} X(c(t))$ für jede differenzierbare Kurve $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow P \subset \mathbb{R}^n$ mit $\dot{c}(0) = V_p$. Für allgemeines M gilt immer noch $(\bar{\nabla}_V X)_p = (\nabla_{\partial_t}^c X \circ c)(0)$ für eine jede solche Kurve. Dies sieht man zum Beispiel direkt an der lokalen Koordinatenformel von oben.

Definition 3.3. Sei $P \subset M$ eine eingebettete Untermannigfaltigkeit.

- (i) Der durch (3.1) definierte Zusammenhang $\bar{\nabla}$ auf $TM|_P$ wird *induzierter Zusammenhang* und der durch (3.3) definierte Zusammenhang ∇^N auf NP *senkrechter Zusammenhang* genannt.
- (ii) Das durch (3.2) definierte Tensorfeld $II \in \Gamma^\infty(T^*P \otimes T^*P \otimes NP)$ wird *zweite Fundamentalform* von P genannt und das Vektorfeld $\vec{h} := \text{tr}_g(II) \in \Gamma^\infty(NP)$ *mittlerer Krümmungsvektor* von $P \subset M$.
- (iii) Ist $\nu \in \Gamma^\infty(NP|_U)$ eine (lokale) Einheitsnormale, so nennt man das durch

$$h_\nu(X, Y) := \langle II(V, W), \nu \rangle \quad (3.4)$$

definierte (skalare) Tensorfeld $h_\nu \in \Gamma^\infty(T^*P|_U \otimes T^*P|_U)$ *zweite Fundamentalform von P in Richtung ν* und das eindeutige bestimmte $S_\nu \in \Gamma^\infty(\text{End}(TP|_U))$ mit

$$\langle S_\nu(V), W \rangle := h_\nu(V, W) \quad (3.5)$$

Weingartenabbildung/Formoperator von P in Richtung ν (engl.: *shape operator*). Die Eigenwerte von S_ν werden *Hauptkrümmungen von P in Richtung ν* genannt.

Im Allgemeinen existieren Normalenvektorfelder und somit etwa auch die zugehörigen Formoperatoren nur lokal. Die Existenz globaler Normalenvektorfelder hängt mit dem Begriff der *Orientierbarkeit* zusammen. So hat zum Beispiel das (nicht orientierbare) Möbisband, auf die übliche Art in den \mathbb{R}^3 eingebettet, keine global definierte Normale.

Warnung: Häufig wird die zweite Fundamentalform *ohne* das Minuszeichen in (3.2) definiert. Die hier verwendete Notation ist für unsere Zwecke geschickter und kompatibel mit der Konvention aus Oliver Schnürers Vorlesungen. Für unsere Zwecke ist es vorteilhaft, dass die Formeln aus dem folgenden

3. Intermezzo: Extrinsische Geometrie von Untermannigfaltigkeiten

Lemma gelten.³ Das führt zum Beispiel dazu, dass sich der Flächeninhalt einer Hyperfläche mit positiver mittlerer Krümmung bei Deformation in Richtung der zugehörigen Normalen vergrößert. So hat etwa eine Sphäre bezüglich der nach außen zeigenden Normalen positive mittlere Krümmung.

Der Name „Formoperator“ erklärt sich durch folgendes Lemma: Nach diesem misst der Formoperator, inwiefern sich die zugehörige Normale von außen (also aus M) betrachtet verändert, wenn man längs der Untermannigfaltigkeit läuft und so die „Form“ von P abtastet.

Lemma 3.4 (Formoperatoren und mittlerer Krümmungsvektor). *Sei $\nu \in \Gamma^\infty(NP|_U)$ eine lokale Einheitsnormale. Für alle $V, W \in \Gamma^\infty(TP|_U)$ gelten:*

$$S_\nu(V) = \tan(\bar{\nabla}_V \nu), \quad (3.6)$$

$$\langle S_\nu(V), W \rangle = \langle V, S_\nu(W) \rangle. \quad (3.7)$$

Sind weiter $\nu_1, \dots, \nu_{n-k} \in \Gamma^\infty(NP|_U)$ ein Orthonormalrahmen von $NP|_U$, so gilt

$$\vec{h} = \sum_{j=1}^{n-k} \text{tr}(S_{\nu_j}) \nu_j. \quad (3.8)$$

Beweis. Wir rechnen für beliebige $V, W \in \Gamma^\infty(TP|_U)$:

$$\begin{aligned} \langle S_\nu(V), W \rangle &= \langle II(V, W), \nu \rangle = \underbrace{\langle \nabla_V^P W, \nu \rangle}_{=0 \text{ da } \nu \perp \nabla_V^P W} - \langle \bar{\nabla}_V W, \nu \rangle = \underbrace{-V \langle V, \nu \rangle}_{=0 \text{ da } \nu \perp V} + \langle W, \bar{\nabla}_V \nu \rangle \\ &= \langle W, \tan(\bar{\nabla}_V \nu) \rangle. \end{aligned}$$

Der letzte Schritt gilt, da W tangential zu P ist. Wegen $S_\nu(W) \in TP$ folgt hieraus (3.6). Die Symmetrie von S_ν , also (3.7), ergibt sich direkt aus der Symmetrie von II . Für (3.8) rechnen wir mit einem lokalen ON-Rahmen e_1, \dots, e_k von TP :

$$\vec{h} = \sum_{j=1}^{n-k} \langle \vec{h}, \nu_j \rangle \nu_j = \sum_{j=1}^{n-k} \sum_{i=1}^k \langle II(e_i, e_i), \nu_j \rangle \nu_j = \sum_{j=1}^{n-k} \sum_{i=1}^k \langle S_{\nu_j}(e_i), e_i \rangle \nu_j = \sum_{j=1}^{n-k} \text{tr}(S_{\nu_j}) \nu_j.$$

□

Wie üblich ist $\text{tr}(S_{\nu_j})$ gleich der Summe der Eigenwerte von S_{ν_j} , also der *Hauptkrümmungen* von $P \subset M$ in Richtung ν_j . Man nennt $H_\nu := \text{tr}(S_\nu)$ die *mittlere Krümmung in Richtung ν* .

³Diese würden auch gelten, wenn man das Minuszeichen aus (3.2) nach (3.5) verlagert. Auch diese Konvention ist manchmal zu finden.

3.2. Die Zerlegung des Levi-Civita-Zusammenhangs

Beispiel 3.5. Betrachte die Sphäre $S_r^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = r\}$. Die nach außen zeigende Normale ν ist explizit gegeben durch $\nu(x) = \frac{x}{|x|} = \frac{x}{r}$. Damit lässt sich der zugehörige Formoperator leicht ausrechnen: Für $w \in T_p S_r^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ und $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n$ glatt mit $\dot{c}(0) = w$ gilt nach Bemerkung 3.2

$$S_\nu(w) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \nu(c(t)) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \frac{c(t)}{r} = \frac{w}{r}.$$

Man beachte, dass die tangentielle Projektion hier weggelassen werden kann (was allgemein im Fall einer Hyperfläche gilt). Es gilt also $S_\nu = \frac{1}{r} \text{id}$ und somit sind alle Hauptkrümmungen gleich $\frac{1}{r}$ und die mittlere Krümmung ist $\frac{n-1}{r}$.

Beispiel 3.6. Betrachte den Zylinder $Z_r^{n-1} := S_r^{n-2} \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^n$ bzw. $Z_r^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \sqrt{(x^1)^2 + \dots + (x^{n-1})^2} = r\}$. Die nach außen zeigende Normale ν ist explizit gegeben durch $\nu(x) = r^{-1} \cdot (x^1, \dots, x^{n-1}, 0)^T = \frac{x - \langle x, e_n \rangle e_n}{r}$. Für $w \in T_p Z_r^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ und $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n$ glatt mit $\dot{c}(0) = w$ gilt nach Bemerkung 3.2

$$S_\nu(w) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \nu(c(t)) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \frac{c(t) - \langle c(t), e_n \rangle e_n}{r} = \frac{w - \langle w, e_n \rangle e_n}{r}.$$

Hieraus kann man (relativ leicht) ableiten, dass $n - 2$ der Hauptkrümmungen gleich $\frac{1}{r}$ sind und eine Hauptkrümmung gleich 0.

Spezialfall I: Hyperflächen $P \subset M$ ist eine Hyperfläche, falls $\dim P = \dim M - 1$ gilt. In diesem Fall gibt es in jedem Punkt von P bis auf Wahl des Vorzeichens genau eine Normale ν . Es gilt dann (für jede der beiden möglichen Wahlen der Normalen)

$$II(V, W) = h_\nu(V, W) \cdot \nu, \quad (3.9)$$

$$\vec{h} = \text{tr}(S_\nu) \cdot \nu = H_\nu \cdot \nu. \quad (3.10)$$

In diesem Spezialfall kann man also nach Wahl einer Normalen mit skalarwertigen Objekten arbeiten (zumindest lokal). Außerdem kann man in (3.6) die Projektion auf den tangentialen Anteil weglassen (man mache sich klar wieso und auch wieso dies bei höherer Kodimension nicht möglich ist).

Spezialfall II: Niveauflächen Für $f \in C^\infty(M)$ nennt man $c \in \text{im}(f)$ einen *regulären Wert* von f , falls $d_p f \neq 0$ für alle $p \in f^{-1}(\{c\})$ gilt.⁴ In diesem Fall folgt aus dem Satz über lokale Umkehrbarkeit, dass $P := f^{-1}(\{c\}) \subset M$ eine eingebettete Hyperfläche ist. Es ist nicht überraschend, dass sich die zuvor definierten geometrischen Größen von P über f ausdrücken lassen.

Proposition 3.7 (Extrinsische Geometrie von Niveauflächen). *Sei $f \in C^\infty(M)$ und sei $c \in \text{im}(f)$ ein regulärer Wert von f . Für $P := f^{-1}(\{c\})$ gelten:*

⁴Für nicht skalare Funktionen würde man stattdessen fordern, dass $D_p f$ maximalen Rang hat.

3. Intermezzo: Extrinsische Geometrie von Untermannigfaltigkeiten

- (i) Durch $\nu := \frac{\text{grad } f}{|\text{grad } f|}$ ist eine (globale) Einheitsnormale für P gegeben.
- (ii) Für alle $X, Y \in \Gamma^\infty(TP)$ gilt $h_\nu(X, Y) = \frac{1}{|\text{grad } f|} \text{Hess } f(X, Y)$ mit ν wie in (i).
- (iii) Die mittlere Krümmung bezüglich ν ist $\frac{1}{|\text{grad } f|} \Delta f - \frac{1}{|\text{grad } f|^3} \text{Hess } f(\text{grad } f, \text{grad } f)$.
- (iv) Für alle $X \in \Gamma^\infty(TM|_P)$ gilt $\text{Hess } f(\text{grad } f, X) = \frac{1}{2} \nabla_X |\text{grad } f|^2$.
- (v) Definiert man $S(X) = \nabla_X^M \frac{\text{grad } f}{|\text{grad } f|}$ für $X \in \Gamma^\infty(TM|_U)$, so gilt für $X \in \Gamma^\infty(TM|_U)$
- $$(\nabla_{\text{grad } f}^M S)(X) + S^2(X) - \nabla_X^M (S(\text{grad } f)) + R^M(X, \text{grad } f) \text{grad } f = 0, \quad (3.11)$$
- wobei $S^2 := S \circ S$.

Ende der
zehnten
Vorlesung
(7.1.)

Beweis. (i) ist klar. Für (ii) rechnen wir

$$\begin{aligned} h(X, Y) &= \langle S(X), Y \rangle = \langle \nabla_X \nu, Y \rangle = \left\langle \nabla_X \frac{\text{grad } f}{|\text{grad } f|}, Y \right\rangle \\ &= \left(X \frac{1}{|\text{grad } f|} \right) \underbrace{\langle \text{grad } f, Y \rangle}_{=0} + \frac{1}{|\text{grad } f|} \langle \nabla_X \text{grad } f, Y \rangle = \frac{1}{|\text{grad } f|} \text{Hess } f(X, Y). \end{aligned}$$

Am Ende haben wir die Definition von $\text{Hess } f$ benutzt. Für (iii) beachte, dass für eine beliebige ONB $e_1, \dots, e_{n-1} \in TP$ gilt:

$$\begin{aligned} H_\nu &= \text{tr}(S_\nu) = \sum_{i=1}^{n-1} \langle S_\nu(e_i), e_i \rangle = \sum_{i=1}^{n-1} \langle \nabla_{e_i} \nu, e_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \left(e_i \left(\frac{1}{|\text{grad } f|} \right) \underbrace{\langle \text{grad } f, e_i \rangle}_{=0} + \frac{1}{|\text{grad } f|} \langle \nabla_{e_i} \text{grad } f, e_i \rangle \right) \\ &= \frac{1}{|\text{grad } f|} \Delta f - \frac{1}{|\text{grad } f|} \langle \nabla_{\text{grad } f / |\text{grad } f|} \text{grad } f, \text{grad } f / |\text{grad } f| \rangle \\ &= \frac{1}{|\text{grad } f|} \Delta f - \frac{1}{|\text{grad } f|^2} \text{Hess } f(\text{grad } f, \text{grad } f). \end{aligned}$$

Im vorletzten Schritt wurde verwendet, dass $e_1, \dots, e_{n-1}, \frac{\text{grad } f}{|\text{grad } f|}$ eine ONB von TM ist. Für (iv) rechnen wir unter Verwendung der Symmetrie von $\text{Hess } f$

$$\text{Hess } f(\text{grad } f, X) = \langle \nabla_X \text{grad } f, \text{grad } f \rangle = \frac{1}{2} X |\text{grad } f|^2.$$

Für (v) rechnen wir schließlich unter Vertauschung zweier kovarianter Ableitungen

$$\begin{aligned} (\nabla_{\text{grad } f} S)(X) &= \nabla_{\text{grad } f} (S(X)) + S(\nabla_{\text{grad } f} X) \\ &= \nabla_{\text{grad } f} (\nabla_X \text{grad } f) + S(\nabla_{\text{grad } f} X) \\ &= \nabla_X (\nabla_{\text{grad } f} \text{grad } f) + R(\text{grad } f, X) \text{grad } f + \nabla_{[\text{grad } f, X]} \text{grad } f + S(\nabla_{\text{grad } f} X) \\ &= \nabla_X (S(\text{grad } f)) - R(X, \text{grad } f) \text{grad } f + S([\text{grad } f, X]) + S(\nabla_{\text{grad } f} X) \\ &= \nabla_X S(\text{grad } f) - R(X, \text{grad } f, \text{grad } f) - S(\nabla_X \text{grad } f) \\ &= \nabla_X S(\text{grad } f) - R(X, \text{grad } f, \text{grad } f) - S^2(X). \end{aligned}$$

3.3. Die Zerlegung des Krümmungstensors

Im vorletzten Schritt haben wir die Torsionsfreiheit in der Form $[V, W] = \nabla_V W - \nabla_W V$ verwendet. \square

Die Einschränkung von $S = \nabla_{\bullet}^M \frac{\text{grad } f}{|\text{grad } f|}$ auf TP ist gerade der Formoperator von P (man muss nicht mehr auf TP projizieren, da P eine Hyperfläche ist). Die Gleichung (3.11) gibt an, wie sich der Formoperator verändert, wenn man die Niveaulfläche wechselt. Da die Eigenwerte von S gerade die Hauptkrümmungen sind, kodiert (3.11) also auch, wie sich diese von Niveaulfläche zu Niveaulfläche verändern.

Wir werden genau daraus weitere Konsequenzen ziehen, wobei in unserer Situation stets f die Abstandsfunktion zu einem Punkt sein wird. Diese erfüllt $|\text{grad } f| = 1$, was einige der vorherigen Formeln vereinfacht. Allgemeiner nennt man eine Funktion mit dieser Eigenschaft *Distanzfunktion*.

Korollar 3.8 (Extrinsische Geometrie der Niveaulflächen von Distanzfunktionen). *Sei $f \in C^\infty(M)$ eine Distanzfunktion, d.h. $|\text{grad } f| = 1$. Dann ist $\text{grad } f$ Einheitsnormale zu allen Niveaulflächen von f , deren zweite Fundamentalform ist durch $II = \text{Hess } f$ gegeben und die mittlere Krümmung in Richtung $\text{grad } f$ durch Δf . Weiter gilt*

$$\nabla_{\text{grad } f} S + S^2 + R(\cdot, \text{grad } f) \text{grad } f = 0. \quad (3.12)$$

Beweis. Die ersten beiden Eigenschaften ergeben sich einfach wegen $|\text{grad } f| = 1$. Die letzten beiden folgen wegen $\nabla_{\text{grad } f} \text{grad } f = 0$. Dies gilt, da

$$\langle \nabla_{\text{grad } f} \text{grad } f, X \rangle = \text{Hess } f(\text{grad } f, X) = \frac{1}{2} X |\text{grad } f|^2 = 0.$$

\square

Bemerkung 3.9. Eine Differentialgleichung der Form $S' + S^2 + R = 0$ nennt man *Riccati-Gleichung*. Diese wird eine entscheidende Rolle spielen.

3.3. Die Zerlegung des Krümmungstensors

Wie wir nun sehen werden, spielt die zweite Fundamentalform bzw. die Formoperatoren eine wichtige Rolle im Zusammenhang der Krümmungen von M und P .

Theorem 3.10 (Die „fundamentalen Krümmungsgleichungen“). *Es gelten die folgenden Zusammenhänge zwischen den Krümmungen von M und von P .*

(i) Für alle $X, Y, Z \in \Gamma^\infty(TP)$ gilt die Identität

$$\begin{aligned} R^M(X, Y)Z &= R^P(X, Y)Z + S_{II(X, Z)}(Y) - S_{II(Y, Z)}(X) \\ &\quad + (\nabla_X II)(Y, Z) - (\nabla_Y II)(X, Z), \end{aligned} \quad (3.13)$$

wobei $(\nabla_V II)(W, X) := \nabla_V^N(II(W, X)) - II(\nabla_V^P W, X) - II(W, \nabla_V^P X)$.

Achtung:
In (3.13) wird der Formoperator auch für ein nicht unbedingt normiertes Normalenfeld verwendet.

3. *Intermezzo: Extrinsische Geometrie von Untermannigfaltigkeiten*

Insbesondere gilt für alle $V, W, X, Y \in \Gamma^\infty(TP)$ die Gauß-Gleichung

$$\begin{aligned} \langle R^P(V, W)X, Y \rangle &= \langle R^M(V, W)X, Y \rangle \\ &\quad + \langle II(V, Y), II(W, X) \rangle - \langle II(V, X), II(W, Y) \rangle \end{aligned} \quad (3.14)$$

und für alle $V, W, X \in \Gamma^\infty(TM)$ die Codazzi-Gleichung

$$\text{nor}(R^M(V, W)X) = (\nabla_V II)(W, X) - (\nabla_W II)(V, X). \quad (3.15)$$

(ii) Für alle $X, Y \in \Gamma^\infty(TP)$ und $\nu, \eta \in \Gamma^\infty(NP)$ gilt die Ricci-Gleichung:

$$\langle R^M(X, Y)\nu, \eta \rangle = \langle R^N(X, Y)\nu, \eta \rangle - \langle [S_\nu, S_\eta](X), Y \rangle. \quad (3.16)$$

4. Vergleichsgeometrie

4.1. Vergleichssätze für die Riccati-Gleichung

In diesem Abschnitt sei stets $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein endlichdimensionaler euklidischer Vektorraum. Für $A \in \text{End}(E)$ bezeichnen wir mit $A^* \in \text{End}(E)$ den adjungierten Endomorphismus, d.h. mit $\langle Av, w \rangle = \langle v, A^*w \rangle$ für alle $v, w \in E$. Weiter bezeichnen wir mit $S(E)$ die Menge der selbstadjungierten/symmetrischen Endomorphismen.

Die folgenden beiden Sätze und deren Beweise sind der Inhalt des Artikels [2].

Lemma 4.1 (Klassifikation von Singularitäten der Riccati-Gleichung). *Sei $R : \mathbb{R} \rightarrow S(E)$ glatt und sei $S : (0, b) \rightarrow S(E)$ eine Lösung von $S' + S^2 + R = 0$. Dann existieren orthogonale Projektionen $P_{\pm} \in S(E)$, sodass sich $C_-(t) := S(t) - \frac{1}{t}P_-$ stetig nach $t = 0$ fortsetzen lässt und $C_+(t) := S(t) + \frac{1}{t}P_+$ stetig nach $t = b$ fortsetzen lässt. Weiter gelten im $P_- \subset \ker C_-(0)$ und im $P_+ \subset \ker C_+(0)$.*

Beweis. Es genügt, die Aussage für $t \rightarrow 0$ zu zeigen, denn definiert man $\widehat{S} : (0, b) \rightarrow S(E)$ durch $\widehat{S}(t) := -S(b-t)$, so gilt $\widehat{S}' + \widehat{S}^2 + \widehat{R} = 0$ mit $\widehat{R}(t) = R(b-t)$. Die Asymptotik von S für $t \rightarrow b$ lässt sich aus der von \widehat{S} für $t \rightarrow 0$ gewinnen (beachte die Änderung im Vorzeichen vor dem divergenten Term).

Wir argumentieren über die zugehörige Jacobigleichung: Wähle $t_0 \in (0, b)$ und sei $A : (0, b) \rightarrow \text{End}(E)$ die eindeutige Lösung von $A' = S \cdot A$ mit $A(t_0) = \text{id}_E$. Dann gilt

$$A'' = S' \cdot A + S \cdot A' = -(S^2 + R) \cdot A + S \cdot (SA) = -RA,$$

also erfüllt A die (Matrix-)Jacobi-Gleichung $A'' + RA = 0$. Als Lösung dieser *linearen* DGL lässt sich A eindeutig glatt auf ganz \mathbb{R} fortsetzen (da R auf \mathbb{R} definiert ist).

Behauptung: A ist auf $(0, b)$ invertierbar und somit gilt $S = A'A^{-1}$.

Sei $B : (0, b) \rightarrow \text{End}(E)$ die Lösung von $B' = -B \cdot S$ mit $B(t_0) = \text{id}_E$. Dann gilt

$$(BA)' = B'A + BA' = -BSA + BSA = 0,$$

also ist BA konstant, somit $(BA)(t) = B(t_0)A(t_0) = \text{id}_E$ für alle $t \in (0, b)$.

Wegen $S = A'A^{-1}$ auf $(0, b)$ steckt mögliches singuläres Verhalten von S komplett in A^{-1} . Wir analysieren deshalb das Verhalten von $A^{-1}(t)$ für $t \rightarrow 0^+$ genauer. Interessant ist dabei natürlich der Kern von $A(t)$.

Für jedes $v \in V$ ist $Av : \mathbb{R} \rightarrow E$ eine Lösung der Jacobigleichung $(Av)'' + R(Av) = 0$. Gilt $v \neq 0$, so gilt $(Av)(t_0) = v \neq 0$, also ist Av eine nichttriviale Lösung. Deshalb gilt $A(t)v \neq 0$ oder $A'(t)v \neq 0$ für jedes $t \in \mathbb{R}$. Dies zeigt:

$$\forall t \in \mathbb{R} : \quad \ker A(t) \cap \ker A'(t) = \{0\} \quad (*)$$

4. Vergleichsgeometrie

Definiere $V : \mathbb{R} \rightarrow \text{End}(E)$ durch $V(t) := \begin{cases} \frac{1}{t}(A(t) - A(0)) & t \neq 0, \\ A'(0) & t = 0. \end{cases}$

Setze $K := \ker A(0)$. Dann ist $A(0)$ injektiv auf K^\perp und wegen (*) ist $V(0) = A'(0)$ injektiv auf K . Somit gilt

$$\dim [A(0)(K^\perp)] + \dim [V(0)(K)] = \dim K^\perp + \dim K = \dim E, \quad (**)$$

Wir behaupten, dass zudem $A(0)(K^\perp) \perp V(0)(K)$ und somit aus Dimensionsgründen sogar $E = A(0)(K^\perp) \oplus V(0)(K)$ gilt: Für beliebiges $t \in (0, b)$ gilt wegen $S(t)^* = S(t)$

$$A'(t)^* A(t) - A^*(t) A'(t) = (S(t)A(t))^* A(t) - A^*(t) S(t) A(t) = 0,$$

also gilt $A'(t)A^*(t) = A^*(t)A'(t)$ für $t \in (0, b)$. Dies gilt auch außerhalb dieses Intervalls, denn aus der Jacobigleichung folgt (beachte $R^* = R$):

$$\begin{aligned} (A'(t)^* A(t) - A^*(t) A'(t))' &= A''(t)^* A(t) + A'(t)^* A'(t) - A'(t)^* A'(t) - A^*(t) A''(t) \\ &= -(R(t)A(t)^* A(t) + A^*(t)R(t)A(t)) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Deshalb gilt $(A')^* A = A^* A'$ überall.

Wir verwenden dies für $t = 0$ und erhalten für beliebige $v \in K^\perp$, $w \in K$:

$$\langle A(0)v, V(0)w \rangle = \langle A(0)v, A'(0)v \rangle = \langle v, A(0)^* A'(0)w \rangle = \langle v, A'(0)^* A(0)w \rangle = 0$$

Also gilt $A(0)(K^\perp) \perp V(0)(K)$. Zusammen mit (**) ergibt sich somit

$$E = [A(0)(\ker A(0)^\perp)] \oplus [V(0)(\ker A(0))].$$

Wir können folglich eine Basis $e_1, \dots, e_n \in E$ wählen mit

- $e_1, \dots, e_k \in \ker A(0)$
- $e_{k+1}, \dots, e_n \in \ker A(0)^\perp$
- $V(0)e_1, \dots, V(0)e_k, A(0)e_{k+1}, \dots, A(0)e_n$ ist wieder eine Basis von E .

Wegen $A(t) = A(0) + tV(t)$ folgt dann weiter:

$$\begin{aligned} t^{-k} \det A(t) &= \det(V(t)e_1, \dots, V(t)e_k, A(t)e_{k+1}, \dots, A(t)e_n) \\ &\rightarrow \det(V(0)e_1, \dots, V(0)e_k, A(0)e_{k+1}, \dots, A(0)e_n) \neq 0. \end{aligned}$$

Dies zeigt, dass $t^{-k} \det A(t)$ glatt auf ganz \mathbb{R} ist (erste Zeile) und für $t = 0$ von 0 verschieden (zweite Zeile). Aus der Darstellung von A^{-1} (welche zumindest auf $(0, b)$ existiert) über die Adjunkte von A ergibt sich für $t \in (0, b)$

$$t^k A^{-1}(t) = t^k \frac{1}{\det A(t)} \text{adj}(A(t)) = \frac{1}{t^{-k} \det A(t)} \text{adj}(A(t)).$$

4.1. Vergleichssätze für die Riccati-Gleichung

Nach der vorherigen Überlegung ist diese Funktion glatt zumindest auf $(-\varepsilon, b)$ für $\varepsilon > 0$ hinreichend klein. Damit ist auch $t^k S(t) = t^k A(t)A(t)^{-1}$ glatt auf $[0, b)$ und kann somit durch Taylorpolynome in $t = 0$ approximiert werden. Wir approximieren in k -er Ordnung und erhalten $S_0, \dots, S_{k-1} \in S(V)$ sowie $\tilde{C} : (-\varepsilon, b) \rightarrow S(V)$ glatt mit

$$t^k S(t) = S_0 + tS_1 + \dots + t^{k-1}S_{k-1} + \tilde{C}(t),$$

wobei zudem $\lim_{t \rightarrow 0} t^{-(k-1)}\tilde{C}(t) = 0$ gilt und $\lim_{t \rightarrow 0} t^{-k}\tilde{C}(t)$ existiert. Auf $(0, b)$ gilt weiter

$$S(t) = t^{-k}S_0 + \dots + t^{-1}S_{k-1} + C(t) = \sum_{i=0}^{k-1} t^{-(k-i)}S_i + C(t)$$

mit $C(t) := t^{-k}\tilde{C}(t)$. Beachte, dass C sich stetig nach $t = 0$ fortsetzen lässt.

Wir zeigen, dass $S_0, \dots, S_{k-2} = 0$ gelten. Dazu rechnen wir auf $(0, b)$:

$$S' = -\sum_{i=0}^{k-1} (k-i)t^{-(k-i+1)}S_i + C',$$

$$S^2 = \sum_{i,j=0}^{k-1} t^{-(2k-i-j)}S_i S_j + \sum_{i=0}^{k-1} t^{-(k-i)}(S_i C + C S_i) + C^2.$$

Es gilt $S' + S^2 = -R$ und R ist glatt auf ganz \mathbb{R} . Somit existiert $\lim_{t \rightarrow 0} t^m(S'(t) + S^2(t))$ für alle $m \geq 0$ und ergibt 0 wenn $m > 0$. Durch verschiedene Wahlen von m lassen sich die Terme isoliert betrachten.¹

Zunächst gilt $0 = \lim_{t \rightarrow 0} t^{2k}(S'(t) + S^2(t)) = S_0^2$ und somit $S_0 = 0$, da $S_0 \in S(E)$.

Damit sind auch alle Terme mit Potenzen von Grad größer als $2(k-1)$ identisch 0. Damit folgt $\lim_{t \rightarrow 0} t^{2(k-1)}(S'(t) + S^2(t)) = S_1^2$. Da andererseits auch dieser Grenzwert 0 sein muss, folgt $S_1 = 0$, da $S_1 \in S(E)$.

So kann man iterativ fortfahren bis man irgendwann $S_0 = \dots = S_{k-2} = 0$ erreicht hat. Im nächsten Schritt ergibt sich dann $S_{k-1}^2 = S_{k-1}$, also ist $P := S_{k-1}$ eine Projektion und es gilt $S(t) = C(t) + \frac{P(t)}{t}$.

Im anschließenden Schritt erhält man noch $S_{k-1}C(0) + C(0)S_{k-1} = 0$. Damit lässt sich im $P \subset \ker C(0)$ zeigen. Sei dazu $v \in V$. Es gilt

$$PC(0)Pv = -C(0)P^2v = -C(0)Pv,$$

also ist $C(0)Pv$ Eigenvektor von P zum Eigenwert -1 . Damit folgt weiter

$$PC(0)v = -C(0)Pv = PC(0)Pv = -P^2C(0)v = -PC(0)v.$$

Also gilt $PC(0)v = 0$ und somit auch $C(0)Pv = 0$. Also gilt $\text{im}(P) \subset \ker C(0)$. □

¹Der Grenzwert $\lim_{t \rightarrow 0} t^m C'(t)$ existiert für $m \geq 1$ und ist 0 für $m \geq 2$. Dies folgt aus allgemeinen Überlegungen für die Restterme von Taylorentwicklungen einer Funktion, indem man diese mit den Resttermen der Taylorentwicklung der Ableitung einer Funktion in Verbindung bringt.

4. Vergleichsgeometrie

Bemerkung 4.2. (Mögliche Divergenzen für $t \rightarrow b$. Das ist jetzt mit im Lemma enthalten.)

Als nächstes, und das ist die eigentliche Aussage dieses Abschnitts, vergleichen wir Lösungen von Riccati-Gleichungen mit verschiedenen „Krümmungstermen“. Da es sich bei den Lösungen um linearen Abbildungen („Matrizen“) handelt, müssen wir davor festlegen, wie wir zwei solche vergleichen wollen. In folgendem Theorem wird dazu die (semi-)Definitheit von symmetrischen Endomorphismen verwendet:

Für $A, B \in S(E)$ schreiben wir $A \leq B$ für die Aussage $\langle Av, v \rangle \leq \langle Bv, v \rangle$ für alle $v \in E$. Dies ist äquivalent dazu, dass $B - A \geq 0$ ist (also positiv semidefinit ist), was äquivalent dazu ist, dass alle Eigenwerte von $B - A$ nichtnegativ sind.

Theorem 4.3 (Matrix-Riccati-Vergleich). *Seien $R_1, R_2 : \mathbb{R} \rightarrow S(E)$ glatt und seien $S_i : (0, t_i) \rightarrow S(E)$ für $i = 1, 2$ Lösungen von $S'_i + S_i^2 + R = 0$ mit $t_i > 0$ maximal. Weiter gelte $R_1 \geq R_2$ und $U := S_2 - S_1$ habe eine stetig Fortsetzung $U(0)$ in $t = 0$ mit $U(0) \geq 0$. Dann gelten:*

(i) $t_1 \leq t_2$ und $S_1 \leq S_2$ auf $(0, t_1)$

(ii) $d(t) := \dim \ker U(t)$ ist auf $(0, t_1)$ monoton fallend.

(iii) Gilt $S_1(t) = S_2(t)$ für ein $t \in (0, t_1)$, so gelten $S_1 = S_2$ und $R_1 = R_2$ auf $(0, t]$.

Beweis. Nach dem vorherigen Lemma gilt $S_j(t) = C_j(t) + \frac{1}{t}P_j$, wobei P_j eine Projektion ist und C_j sich stetig nach $t = 0$ fortsetzen lässt. Nach Voraussetzung lässt sich $U = S_2 - S_1 = (C_2 - C_1) + \frac{1}{t}(P_2 - P_1)$ stetig nach $t = 0$ fortsetzen. Da sich auch C_1 und C_2 stetig nach $t = 0$ fortsetzen lassen, folgt hieraus $P_1 = P_2$. Setze $P := P_1$.

Zu (i): Setze $t_0 := \min\{t_1, t_2\}$. Wir möchten $U \geq 0$ auf $(0, t_0)$ sowie $t_0 = t_1$ zeigen.

Eine leichte Rechnung zeigt, dass

$$U' = XU + UX + R$$

mit $X := -\frac{1}{2}(S_1 + S_2)$ und $R := R_1 - R_2$ gilt. Durch eine Art „Variation der Konstanten Ansatz“ lässt sich diese Gleichung vereinfachen. Fixiere dazu $T \in (0, t_0)$ und seien

- $V : (0, t_0) \rightarrow \text{End}(E)$ die Lösung von $V' = XV$ mit $V(T) = \text{id}$.
- $A : (0, t_0) \rightarrow \text{End}(E)$ die Lösung von $A' = V^{-1}R(V^{-1})^*$ mit $A(T) = U(T)$.

Beachte dabei, dass $V(t)$ in der Tat für alle $t \in (0, t_0)$ invertierbar ist, denn für die eindeutige Lösung $W : (0, t_0) \rightarrow \text{End}(E)$ von $W' = -WX$ mit $W(T) = \text{id}$ gilt

$$(WV)' = W'V + WV' = -WXV + WXV = 0,$$

also folgt aus $(WV)(T) = \text{id}$ somit $W(t) = V(t)^{-1}$ für alle $t \in (0, t_0)$.

Behauptung: $U = VAV^*$ und somit für $t \in (0, t_0)$ auch $U(t) \geq 0 \iff A(t) \geq 0$.

4.1. Vergleichssätze für die Riccati-Gleichung

Nach Konstruktion gelten $(VAV^*)(T) = U(T)$ sowie

$$\begin{aligned} (VAV^*)' &= V'AV^* + VA'V^* + VA(V')^* \\ &= (XV)AV^* + V(V^{-1}R(V^{-1})^*)V^* + VA(XV)^* \\ &= X(VAV^*) + (VAV^*)X + R \end{aligned}$$

Somit folgt $VAV^* = U$. Insbesondere ist also auch A symmetrisch. Die Aussage über die Semidefinitheit folgt aus der Invertierbarkeit von $V(t)$.

Sei $v \in V$ und $f : (0, t_0) \rightarrow \mathbb{R}$ durch $f(t) := \langle A(t)x, x \rangle$ definiert. Wir wollen zeigen, dass $f \geq 0$ gilt. Zunächst gilt wegen $A' = V^{-1}R(V^{-1})^*$ und $R \geq 0$, dass $A' \geq 0$ und somit $f' \geq 0$ gilt. Es genügt also zu zeigen, dass $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t)$ existiert und nichtnegativ ist. Zum Nachweis der Existenz reicht es aufgrund der Monotonie zu zeigen, dass f auf $(0, T]$ beschränkt ist. Hierzu rechnen wir zunächst:

$$\begin{aligned} |f(t)| &= |\langle A(t)x, x \rangle| = |\langle V(t)^{-1}U(t)(V(t)^{-1})^*x, x \rangle| \\ &= |\langle U(t)(V(t)^{-1})^*x, (V(t)^{-1})^*x \rangle| \leq \|U(t)\| \cdot \underbrace{|(V(t)^{-1})^*x|^2}_{=:g(t)} \quad (*) \end{aligned}$$

Da sich U nach Voraussetzung stetig nach $t = 0$ fortsetzen lässt, ist $\|U(t)\|$ auf $[0, T]$ beschränkt. Es bleibt also die Beschränktheit von g zu zeigen. Dazu betrachten wir die Ableitung von g . Zunächst gilt

$$\begin{aligned} 0 &= (VV^{-1})' = V'V^{-1} + V(V^{-1})' = (XV)V^{-1} + V(V^{-1})', \\ \text{also } ((V^{-1})')^* &= (-V^{-1}X)^* \stackrel{(X^*=X)}{=} -X(V^{-1})^*, \\ \text{also } g' &= 2 \langle ((V^{-1})^*)'x, (V^{-1})^*x \rangle = -2 \langle X(V^{-1})^*x, (V^{-1})^*x \rangle. \end{aligned}$$

Wir betrachten X genauer. Mit $M := \max\{\|C_1(t) - C_2(t)\| : 0 \leq t \leq T\}$ gilt für beliebiges $y \in E$ und $0 < t \leq T$ die Abschätzung

$$\langle X(t)y, y \rangle = \underbrace{-\frac{1}{2} \langle (C_1(t) + C_2(t))y, y \rangle}_{\leq \frac{M}{2}|y|^2} - \underbrace{\frac{1}{t} \langle Py, y \rangle}_{\geq 0, \text{ da } P \text{ Projektion}} \leq \frac{M}{2}|y|^2$$

und damit weiter

$$g' = -2 \langle X(V^{-1})^*x, (V^{-1})^*x \rangle \geq -M|(V^{-1})^*x|^2 = -Mg.$$

Hieraus folgt, dass g von oben beschränkt ist, denn es gilt

$$(g(t)e^{Mt})' = g'(t)e^{Mt} + g(t)Me^{Mt} \geq 0$$

und deshalb $g(T)e^{MT} - g(t)e^{Mt} \geq 0$ für alle $t \in (0, T]$ bzw. $g(t) \leq g(T)e^{M(T-t)}$. Als Normquadrat gilt aber natürlich auch $g \geq 0$ und somit ist also g beschränkt.

4. Vergleichsgeometrie

Aus (*) folgt nun, dass auch f beschränkt ist, was zusammen mit der Monotonie von f zeigt, dass $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t)$ existiert. Wir müssen noch zeigen, dass der Grenzwert nichtnegativ ist.

Da $g(t) = |(V(t)^{-1})^*x|^2$ beschränkt ist, können wir eine Folge $(t_k)_k$ mit $t_k \rightarrow 0^+$ und $(V(t_k)^{-1})^*x \rightarrow z \in E$ wählen. Es folgt

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) &= \lim_{k \rightarrow \infty} f(t_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \langle V(t_k)^{-1}U(t_k)(V(t_k)^{-1})^*x, x \rangle \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \langle U(t_k)(V(t_k)^{-1})^*x, (V(t_k)^{-1})^*x \rangle = \langle U(0)z, z \rangle \stackrel{U(0) \geq 0}{\geq} 0. \end{aligned}$$

Zusammen mit $f' \geq 0$ folgt nun $f \geq 0$ auf $(0, t_0)$. Damit ist $A \geq 0$ auf $(0, t_0)$ gezeigt und somit auch $U \geq 0$ bzw. $S_1 \leq S_2$.

Es bleibt zu zeigen, dass $t_1 \leq t_2$ gilt. Im Fall $t_2 = \infty$ ist nichts zu zeigen, betrachte also noch den Fall $t_2 < \infty$. Aufgrund der Asymptotik gegen den rechten Randpunkt aus Lemma 4.1 können wir in diesem Fall ein $v \in E$ wählen mit $\langle S_2(t)v, v \rangle \rightarrow -\infty$ für $t \rightarrow t_2^-$ (wähle einfach $v \in \text{im } P_{2+}$). Für alle $t \in (0, t_0)$ gilt nach dem schon gezeigten Teil $\langle S_1(t)v, v \rangle \leq \langle S_2(t)v, v \rangle$. Damit muss $t_1 \leq t_2$ gelten.

Zu (ii): Wegen $U = VAV^*$ und da V invertierbar ist, gilt $d = \dim \ker U = \dim \ker A$. Wir wissen schon, dass $A \geq 0$ und $A' \geq 0$. Hieraus folgt für beliebige $v \in V$ und $s, t \in (0, t_1)$ mit $s < t$:

$$v \in \ker A(t) \implies \langle A(t)v, v \rangle = 0 \xrightarrow{A \geq 0, A' \geq 0} \langle A(s)v, v \rangle = 0 \xrightarrow{A(s)^* = A(s)} A(s)v = 0.$$

Also gilt $\ker A(t) \subset \ker A(s)$ wenn $s < t$ und somit ist die Funktion d monoton fallend.

Zu (iii): Aus $S_1(t) = S_2(t)$ folgt $U(t) = 0$ und somit $d(t) = \dim \ker U(t) = \dim E$. Da d nach (ii) monoton fällt folgt hieraus $d(s) = \dim E$ für alle $s < t$ und somit $U(s) = 0$ für alle $0 < s \leq t$. Also gilt $S_1(s) = S_2(s)$ für alle $0 < s \leq t$. Aus den Riccati-Gleichungen für S_1 und S_2 folgt nun auch $R_1(s) = R_2(s)$ für alle $0 < s \leq t$. \square

Bemerkung 4.4 (Strikte Ungleichungen). Die Aussagen von Theorem 4.3 bleiben wahr, wenn man überall \leq durch $<$ ersetzt. In diesem Fall kann man auch (ohne eine „Variation der Konstanten“) direkt $\langle U(t)v, v \rangle$ relativ leicht direkt abschätzen. (Übung.)

Bemerkung 4.5 (Eigenwertungleichungen statt Operatorungleichung). Für $A \in \mathcal{S}(E)$ schreiben wir $\lambda_{\pm}(A) \in \mathbb{R}$ für den größten/kleinsten Eigenwert von A . Für $A, B \in \mathcal{S}(E)$ gelten dann allgemein folgende Zusammenhänge: (Beweis: Übung!)

- $A \leq B \implies \lambda_-(A) \leq \lambda_-(B)$ und $\lambda_+(A) \leq \lambda_+(B)$
- $\lambda_+(A) \leq \lambda_-(B) \implies A \leq B$
- $\lambda_+(A) \leq \lambda_-(B) \iff \forall D \in \mathcal{O}(E) : A \leq D^*BD$

4.2. Der Satz von Toponogov (Schnittkrümmungsvergleich)

Man beachte hierbei, dass $A \leq B$ keine „radiale Trennung der Spektren“ impliziert. Aufgrund des letzten Punkts folgt aber aus Theorem 4.3 direkt die folgende Variante:

Aus den (stärkeren) Annahmen $\lambda_+(R_1) \geq \lambda_-(R_2)$ und dass $S_2(t) - D^*S_1(t)D$ für jedes $D \in O(E)$ einen positiv semidefiniten Grenzwert für $t \rightarrow 0^+$ hat, erhält man auch die (stärkere) Folgerung $\lambda_+(S_1) \leq \lambda_-(S_2)$ auf $(0, t_1)$. Dazu wende man zu gegebenem $D \in O(E)$ einfach Theorem 4.3 auf D^*S_1D und S_2 an und beachte, dass D^*S_1D die Riccati-Gleichung $(D^*S_1D)' + (D^*S_1D)^2 + (D^*R_1D) = 0$ erfüllt.

Die Bedingung, dass $S_2(t) - D^*S_1(t)D$ für jedes $D \in O(E)$ einen positiv semidefiniten Grenzwert für $t \rightarrow 0$ hat, erlaubt nur zwei verschiedene Fälle hinsichtlich der Asymptotik von $S_1(t)$ und $S_2(t)$ für $t \rightarrow 0$ (wie in Lemma 4.1 allgemein beschrieben):

- Entweder gilt $P = 0$ (d.h. S_1 und S_2 lassen sich stetig nach $t = 0$ fortsetzen) und $\lambda_+(S_2(0)) \geq \lambda_-(S_1(0))$.
- Oder es gilt $P = \text{id}$ und somit (wegen $\text{im } P_i \subset \ker C_i(0)$) dann $S_i(t) \sim \frac{1}{t}P$ für $t \rightarrow 0$, d.h. $C_i(t) = S_i(t) - \frac{1}{t}P \rightarrow 0$.

Ende der
zwölften
Vorlesung
(21.1.)

4.2. Der Satz von Toponogov (Schnittkrümmungsvergleich)

Eine Grundidee der sogenannten *Vergleichsgeometrie* ist es, geometrische Größen einer Riemannschen Mannigfaltigkeit M unter Annahme einer Krümmungsschranke, z.B. $K \geq \kappa$, mit entsprechenden geometrischen Größen im zugehörigen Modellraum M_κ^n zu vergleichen. Im *Satz von Toponogov*, der den Höhepunkt dieses Abschnitts darstellt, werden etwa Seitenlängen oder Winkel in geodätischen Dreiecken miteinander verglichen.

Dabei wird es im Wesentlichen darum gehen, Längen (Abstände) zu vergleichen. Dazu kann man den Vergleichssatz für die Riccati-Gleichung benutzen, denn die Formoperatoren der geodätischen Sphären um einen Punkt sind gerade durch die Hessesche der Abstandsfunktion zu diesem Punkt gegeben (Korollar 3.8).

Geometrische Größen in Modellräumen (Vergleichsfunktionen) Für $\kappa \in \mathbb{R}$ bezeichne:

- $\text{sn}_\kappa : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die eindeutige Lösung von $f'' + \kappa f = 0$ mit $f(0) = 0$ und $f'(0) = 1$.
- $\text{cs}_\kappa : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die eindeutige Lösung von $f'' + \kappa f = 0$ mit $f(0) = 1$ und $f'(0) = 0$.
- $\text{ct}_\kappa := \frac{\text{cs}_\kappa}{\text{sn}_\kappa}$, definiert außerhalb der Nullstellen von sn_κ .
- $\text{md}_\kappa : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ durch $\text{md}_\kappa(r) := \int_0^r \text{sn}_\kappa(t) dt$.

Im geometrischen Kontext beschreiben die Funktionen sn_κ und cs_κ im Wesentlichen die orthogonalen *Jacobifelder* in M_κ^n (Lemma 2.12) und die Funktion ct_κ die Hauptkrümmung(en) geodätischer Sphären in M_κ^n (Übungsaufgabe), wobei hier für $\kappa > 0$ die Einschränkung $t < \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$ vorgenommen werden muss.

In Tabelle 4.1 sind die Funktionen im Überblick nochmals explizit dargestellt.

Es gelten die üblichen „trigonometrischen“ Identitäten:

4. Vergleichsgeometrie

	$\text{sn}_\kappa(t)$	$\text{cs}_\kappa(t)$	$\text{ct}_\kappa(t)$	$\text{md}_\kappa(t)$
$\kappa < 0$	$\frac{\sinh(\sqrt{ \kappa }t)}{\sqrt{ \kappa }}$	$\cosh(\sqrt{ \kappa }t)$	$\sqrt{ \kappa } \coth(\sqrt{ \kappa }t)$	$\frac{1}{\kappa} \left(1 - \cosh(\sqrt{ \kappa }t)\right)$
$\kappa = 0$	t	1	$\frac{1}{t}$	$\frac{1}{2}t^2$
$\kappa > 0$	$\frac{\sin(\sqrt{\kappa}t)}{\sqrt{\kappa}}$	$\cos(\sqrt{\kappa}t)$	$\sqrt{\kappa} \cot(\sqrt{\kappa}t)$	$\frac{1}{\kappa} \left(1 - \cos(\sqrt{\kappa}t)\right)$

Tabelle 4.1.: Übersicht über die Vergleichsfunktionen.

Lemma 4.6 (Identitäten zwischen den Vergleichsfunktionen). *Sei $\kappa \in \mathbb{R}$. Die Funktionen $\text{sn}_\kappa, \text{cs}_\kappa, \text{ct}_\kappa$ und md_κ erfüllen die folgenden Identitäten (wo sinnvoll definiert):*

$$\text{sn}'_\kappa = \text{cs}_\kappa, \quad (4.1)$$

$$\text{cs}'_\kappa = -\kappa \text{sn}_\kappa, \quad (4.2)$$

$$0 = \text{ct}'_\kappa + \text{ct}_\kappa^2 + \kappa, \quad (\text{Riccati-Gleichung}) \quad (4.3)$$

$$1 = \text{cs}_\kappa^2 + \kappa \text{sn}_\kappa^2, \quad (\text{„Pythagoras“}) \quad (4.4)$$

$$\text{sn}_\kappa(a+b) = \text{sn}_\kappa(a) \text{cs}_\kappa(b) + \text{cs}_\kappa(a) \text{sn}_\kappa(b), \quad (4.5)$$

$$\text{cs}_\kappa(a+b) = \text{cs}_\kappa(a) \text{cs}_\kappa(b) - \kappa \text{sn}_\kappa(a) \text{sn}_\kappa(b), \quad (4.6)$$

$$\text{cs}_\kappa + \kappa \text{md}_\kappa = 1, \quad (4.7)$$

Beweis. Einfaches Nachrechnen. □

Abschätzung der zweiten Ableitung der Abstandsfunktion Nach Korollar 3.8 ist die Hessesche der Abstandsfunktion zu einem Punkt gleich der zweiten Fundamentalform der geodätischen Sphären um diesen Punkt (überall, wo die Abstandsfunktion glatt ist). Somit ergibt sich bei geeigneten Annahmen an die (Schnitt-)Krümmung aus dem Riccati-Vergleich direkt eine Abschätzung der Hesseschen der Abstandsfunktion.

Proposition 4.7 (Abschätzung der zweiten Ableitung der Abstandsfunktion).

Sei M vollständig, $p \in M$ und $r := d(p, \cdot)$. Für die Schnittkrümmung von M gelte $\kappa_1 \leq K \leq \kappa_2$ für $\kappa_1, \kappa_2 \in \mathbb{R}$. Dann gilt für alle $q \in M_p := M \setminus (\{p\} \cup \text{Cut}(p))$ und alle $X \in T_q M$ mit $X \perp \text{grad } r|_q$ und $|X| = 1$

$$\text{ct}_{\kappa_2}(r(q)) \leq (\text{Hess } r)_q(X, X) \leq \text{ct}_{\kappa_1}(r(q)) \quad (4.8)$$

Für die „modifizierten Abstandsfunktionen“ $f_{\kappa_i} := \text{md}_{\kappa_i} \circ r$ ($i = 1, 2$) gelten in M_p weiter

$$\text{Hess } f_{\kappa_1} \leq (\text{cs}_{\kappa_1} \circ r)g = (1 - \kappa_1 f_{\kappa_1})g, \quad (4.9)$$

$$\text{Hess } f_{\kappa_2} \geq (\text{cs}_{\kappa_2} \circ r)g = (1 - \kappa_2 f_{\kappa_2})g. \quad (4.10)$$

Gilt für die Schnittkrümmung nur eine der beiden Schranken, so gelten die entsprechenden Abschätzungen auch dann.

Gilt $M = M_{\kappa_i}^n$ für ein $i = 1, 2$, so gilt in den entsprechenden Ungleichungen Gleichheit.

4.2. Der Satz von Toponogov (Schnittkrümmungsvergleich)

Beweis. Sei $q \in M_p$ und $c : [0, b + \varepsilon] \rightarrow M$ eine minimierende Einheitsgeodäte mit $c(0) = p$ und $c(b) = q$. Wähle einen parallelen ON-Rahmen $e_1, \dots, e_{n-1} \in \Gamma^\infty(\dot{c}^\perp)$, z.B. mittels Paralleltransport, und definiere $S_i^j, R_i^j : [0, b + \varepsilon] \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$S_i^j := \text{Hess } r(e_i, e_j) \quad \text{und} \quad R_i^j := \langle R(e_i, \dot{c})\dot{c}, e_j \rangle .$$

Dann sind $S = (S_i^j)$ und $R = (R_i^j)$ symmetrische Matrizen (punktweise). Weiter:

- Nach Korollar 3.8 sind S_i^j gerade die Komponenten der Formoperatoren der geodätischen Sphären, weshalb $S' + S^2 + R = 0$ gilt.
- Wegen $\kappa_1 \leq K \leq \kappa_2$ gilt $\langle R(v, \dot{c})\dot{c}, v \rangle = K(\dot{c}, v) \in [\kappa_1, \kappa_2]$ für beliebiges $v \in \dot{c}^\perp$ und somit $\kappa_1 I_{n-1} \leq R \leq \kappa_2 I_{n-1}$.
- Für $i = 1, 2$ gilt $\text{ct}'_{\kappa_i} + \text{ct}_{\kappa_i}^2 + \kappa_i = 0$
- Es gilt $\text{ct}_{\kappa_i}(t) \sim \frac{1}{t}$ für $t \rightarrow 0$ und ebenso $S(t) \sim \frac{1}{t} I_{n-1}$ für $t \rightarrow 0$ (Übung).

Wir können somit das Riccati-Vergleich-Theorem 4.3 anwenden und erhalten (insbesondere) $\text{ct}_{\kappa_1} I_{n-1} \leq S \leq \text{ct}_{\kappa_2} I_{n-1}$. Hieraus folgt nun direkt (4.8).

Bzgl. der modifizierten Abstandsfunktionen rechnen wir zunächst für beliebiges $\kappa \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f_\kappa = \text{md}_\kappa(r) &\implies \text{grad } f_\kappa = \text{md}'_\kappa(r) \cdot \text{grad } r = \text{sn}_\kappa(r) \cdot \text{grad } r \\ &\implies \text{Hess } f_\kappa(X, Y) = \langle \nabla_X(\text{sn}_\kappa(r) \text{grad } r), Y \rangle \\ &= (X \text{sn}_\kappa(r)) \langle \text{grad } r, Y \rangle + \text{sn}_\kappa(r) \text{Hess } r(X, Y) \\ &= \text{cs}_\kappa(r) \langle \text{grad } r, X \rangle \langle \text{grad } r, Y \rangle + \text{sn}_\kappa(r) \text{Hess } r(X, Y) \\ &= \text{cs}_\kappa(r) \text{d}r(X) \text{d}r(Y) + \text{sn}_\kappa(r) \text{Hess } r(X, Y) \\ &\implies \text{Hess } f_\kappa = \text{cs}_\kappa(r)(\text{d}r)^2 + \text{sn}_\kappa(r) \text{Hess } r . \end{aligned}$$

Für κ_1 folgt nun einerseits mit der vorherigen Abschätzung für beliebige $q \in M_p$ und $X \in T_q M$ mit $X \perp \text{grad } r|_q$ und $|X|^2 = 1$

$$(\text{Hess } f_\kappa)_q(X, X) = \text{sn}_\kappa(r(q))(\text{Hess } r)_q(X, X) \leq \text{sn}_\kappa(r(q)) \text{ct}_\kappa(r(q)) = \text{cs}_\kappa(r(q)) .$$

Andererseits gilt wegen $\text{Hess } r(\text{grad } r, \cdot) = 0$ (wegen $|\text{grad } r| = 1$) auch

$$(\text{Hess } f_\kappa)_q(\text{grad } r|_q, \text{grad } r|_q) = \text{cs}_\kappa(r(q)) \underbrace{\text{d}r(\text{grad } r) \text{d}r(\text{grad } r)}_{=1} = \text{cs}_\kappa(r(q)) .$$

Dies zeigt, dass $(\text{Hess } f_\kappa)_q \leq \text{cs}_\kappa(r(q))g_q$ gilt (die Metrik kommt dazu, wenn man auf die Normierung verzichtet). Die Abschätzung für f_{κ_2} folgt analog.

Dass für $M = M_{\kappa_i}^n$ in allen entsprechenden Ungleichungen Gleichheit gilt, folgt zum Beispiel aus der eindeutigen Lösbarkeit der Riccati-Gleichung, da dadurch der Formoperator (und somit die Hessesche der Abstandsfunktion) festgelegt ist. \square

4. Vergleichsgeometrie

Für den schon angesprochenen Satz von Toponogov ist es wichtig, dass die Abschätzungen der letzten Proposition in einem gewissen Sinne auch global gelten (ohne die Einschränkung hinsichtlich des Schnittpunkts). Da die Abstandsfunktion auf dem Schnittpunkt jedoch nicht differenzierbar ist, müssen die zweiten Ableitungen anders interpretiert werden. Dazu verwenden wir die folgende Begriffsbildung:

Definition 4.8 (Zweite Ableitungen im Barrierensinne). Seien $f \in C(M)$ und $p \in M$

- (i) Eine auf einer Umgebung von p definierte glatte Funktion g mit $g \leq f$ ($g \geq f$) und $g(p) = f(p)$ heißt *untere (obere) Barriere für f in p* .
- (ii) Für eine symmetrische Bilinearform $B : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ sagen wir:
 - $\text{Hess } f(p) \leq B$ gilt im Barrierensinne, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ eine obere Barriere g für f in p mit $\text{Hess } g(p) \leq B + \varepsilon g_p$ existiert.
 - $\text{Hess } f(p) \geq B$ gilt im Barrierensinne, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ eine untere Barriere g für f in p mit $\text{Hess } g(p) \geq B - \varepsilon g_p$ existiert.

Barrieren sind zum Beispiel nützlich bei Extremwertbetrachtungen in Stellen, an denen eine Funktion nicht differenzierbar ist: Ist nämlich p ein lokales Maximum von f und g eine untere Barriere für f in p , so ist p auch ein lokales Maximum von g . Anschaulich sollte dies klar sein, formal gilt für q nahe p

$$g(q) \stackrel{\text{untere Barriere}}{\leq} f(q) \stackrel{\text{lok. Max.}}{\leq} f(p) \stackrel{\text{Barriere in } p}{=} g(p).$$

Da g glatt ist, folgt $\text{Hess } g(p) \leq 0$. Somit kann zum Beispiel $\text{Hess } f(p)$ nicht positiv definit sein (im Barrierensinne). Auf ähnliche Art werden wir den Begriff später anwenden.

Die Nützlichkeit in unserem Kontext ergibt sich daraus, dass (modifizierte) Abstandsfunktionen stets einfache obere Barrieren haben.

Proposition 4.9 (Globale Abschätzungen der 2. Ableitungen der Abstandsfunktion). Sei M vollständig. Für die Schnittkrümmung von M gelte $K \leq \kappa$ für ein $\kappa \in \mathbb{R}$. Sei $p \in M$ und sei $f_\kappa := \text{md}_\kappa \circ d(p, \cdot)$. Es gilt $\text{Hess } f_\kappa \leq (\text{cs}_\kappa \circ r)g = (1 - \kappa f_\kappa)g$ auf ganz M im Barrierensinne.

Beweis. Beachte zunächst: Im Fall $\kappa > 0$ gilt nach dem Satz von Bonnet-Myers (Theorem 2.26) $\text{diam } M \leq \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$. Weiter ist hier Gleichheit nach dem Durchmesseratz von Cheng (??) nur für $M \simeq M_\kappa^n$ möglich. In diesem Fall ist die Behauptung klar, da sogar Gleichheit gilt. Somit können wir für $\kappa > 0$ stets annehmen, dass $\text{diam } M < \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$ gilt.

Sei $q \in M$. Wir wollen zeigen, dass $(\text{Hess } f_\kappa)_q \leq \text{cs}_\kappa(r(q))g_q$ im Barrierensinne gilt. Wähle eine minimierende Einheitsgeodäte $c : [0, b] \rightarrow M$ von p nach q . Für $\varepsilon > 0$ sei $r_\varepsilon := d(c(\varepsilon), \cdot)$ und φ_ε definiert durch

$$\rho_\varepsilon(x) := \varepsilon + r_\varepsilon(x).$$

Da c minimierend ist, gilt $q \notin \text{Cut}(c(\varepsilon))$ für $\varepsilon < b$. Da der Schnittpunkt abgeschlossen ist, hat q auch eine offene Umgebung im Komplement von $\text{Cut}(c(\varepsilon))$. Auf dieser ist r_ε

4.2. Der Satz von Toponogov (Schnittkrümmungsvergleich)

und somit ρ_ε glatt. Ebenfalls da c minimierend ist, gilt $d(p, c(\varepsilon)) = \varepsilon$ und somit gilt für beliebiges $x \in M$:

$$\rho_\varepsilon(x) = \varepsilon + d(c(\varepsilon), x) = d(p, c(\varepsilon)) + d(c(\varepsilon), x) \geq d(p, x) = r(x).$$

Wiederum da c minimierend ist, gilt $\rho_\varepsilon(q) = r(q)$. Damit ist nachgewiesen, dass ρ_ε eine obere Barriere für r in q ist.

Definiere weiter $\varphi_\varepsilon := \text{md}_\kappa \circ \rho_\varepsilon$. Dann ist auch φ_ε glatt nahe q und $\varphi_\varepsilon(q) = f_\kappa(q)$. Es gilt auch $\varphi_\varepsilon \geq f_\kappa$ nahe q , denn:

- Für $\kappa \leq 0$ folgt dies wegen $\text{md}'_\kappa = \text{sn}_\kappa \geq 0$ direkt aus $\rho_\varepsilon \geq r$ (nahe q).
- Für $\kappa > 0$ gilt $\text{md}'_\kappa = \text{sn}_\kappa \geq 0$ auf $[0, \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}]$. Dies reicht aus, denn nach der Bemerkung von zu Beginn gilt $\rho_\varepsilon(q) = r(q) < \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$. Damit gilt aber auch noch $\rho_\varepsilon < \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$ in einer kleinen Umgebung von q , also gilt dort $r \leq \rho_\varepsilon < \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$.

Also ist φ_ε eine obere Barriere für f_κ .

Wir zeigen nun, dass $(\text{Hess } \varphi_\varepsilon)|_q$ die gewünschte Abschätzung erfüllt. Mit derselben Rechnung wie im Beweis von Proposition 4.7 gilt zunächst für $\varphi_\varepsilon = \text{md}_\kappa \circ \rho_\varepsilon$:

$$\text{Hess } \varphi_\varepsilon = \text{cs}_\kappa(\rho_\varepsilon)(d\rho_\varepsilon)^2 + \text{sn}_\kappa(\rho_\varepsilon) \text{Hess } \rho_\varepsilon. \quad (*)$$

Wegen $\rho_\varepsilon = \varepsilon + r_\varepsilon$ gelten zudem $d\rho_\varepsilon = dr_\varepsilon$ und $\text{Hess } \rho_\varepsilon = \text{Hess } r_\varepsilon$.

Wegen $(\text{Hess } r_\varepsilon)_q(\text{grad } r_\varepsilon|_q, \cdot) = 0$ gilt somit einerseits

$$(\text{Hess } \varphi_\varepsilon)_q(\text{grad } r_\varepsilon|_q, \text{grad } r_\varepsilon|_q) = \text{cs}_\kappa(\rho_\varepsilon(q)) \underbrace{\langle \text{grad } r_\varepsilon|_q, \text{grad } r_\varepsilon|_q \rangle^2}_{=1} = \text{cs}_\kappa(\rho_\varepsilon(q)) = \text{cs}_\kappa(r(q)).$$

Für $X \in T_q M$ mit $X \perp \text{grad } r_\varepsilon|_q$ können wir auf r_ε die rechte Abschätzung in (4.8) anwenden und erhalten

$$(\text{Hess } \rho_\varepsilon)_q(X, X) = (\text{Hess } r_\varepsilon)_q(X, X) \leq \text{ct}_\kappa(r_\varepsilon(q)) = \text{ct}_\kappa(\rho_\varepsilon(q) - \varepsilon) = \text{ct}_\kappa(r(q) - \varepsilon)$$

Mit (*) folgt dann weiter

$$(\text{Hess } \varphi_\varepsilon)_q(X, X) \leq \text{sn}_\kappa(\rho_\varepsilon(q)) \text{ct}_\kappa(r(q) - \varepsilon) = \text{cs}_\kappa(r(q)) + \frac{\text{sn}_\kappa(\varepsilon)}{\text{sn}_\kappa(r(q) - \varepsilon)}.$$

Die letzte Gleichheit lässt sich leicht mit den Additionstheoremen aus Lemma 4.6 nachrechnen. Da der zweite Summand für $\varepsilon \rightarrow 0$ gegen 0 konvergiert (beachte für $\kappa > 0$ nochmals, dass wir $r(q) < \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$ annehmen können und somit der Nenner nicht auch gegen 0 geht), gilt somit für beliebige $\delta > 0$ die Abschätzung $(\text{Hess } \varphi_\varepsilon)_q(X, X) \leq \text{cs}_\kappa(r(q)) + \delta$ sofern nur $\varepsilon > 0$ hinreichend klein ist.

Insgesamt folgt, dass für beliebiges $\delta > 0$ also $(\text{Hess } \varphi_\varepsilon)_q \leq (\text{cs}_\kappa(r(q)) + \delta)g_q$ gilt, sofern $\varepsilon > 0$ hinreichend klein ist. Damit ist gezeigt, dass $(\text{Hess } f_\kappa)_q \leq \text{cs}_\kappa(r(q))g_q$ im Barrierensinne gilt.

□

4. Vergleichsgeometrie

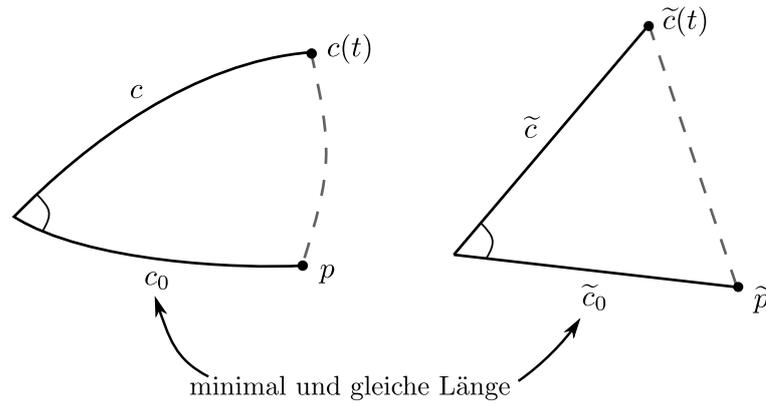


Abbildung 4.1.: Skizze der Situation in Proposition 4.10. Es wird der Abstand von p zu $c(t)$ mit dem von \tilde{p} zu $\tilde{c}(t)$ verglichen.

Wir verwenden die Abschätzung für die modifizierte Abstandsfunktion zu einem Vergleich von Abständen. Die dabei betrachtete geometrische Situation ist in Abbildung 4.1 dargestellt.

Ende
der 13.
Vorlesung
(28.1.)

Proposition 4.10. Sei (M, g) vollständig und für die Schnittkrümmung gelte $K \geq \kappa$ für ein $\kappa \in \mathbb{R}$. Seien bzw. gelte weiter: (vgl. Abbildung 4.1)

- $c_0, c : \mathbb{R} \rightarrow M$ und $\tilde{c}_0, \tilde{c} : \mathbb{R} \rightarrow M_\kappa^n$ Einheitsgeodäten mit $c_0(0) = c(0)$, $\tilde{c}_0(0) = \tilde{c}(0)$
- $b > 0$ so, dass c_0 und $\tilde{c}_0(0)$ zwischen $c_0(0)$ und $p := c_0(b)$ bzw. zwischen $\tilde{c}_0(0)$ und $\tilde{p} := \tilde{c}_0(b)$ minimieren.
- $\langle \dot{c}(0), \dot{c}_0(0) \rangle \geq \langle \dot{\tilde{c}}(0), \dot{\tilde{c}}_0(0) \rangle$

Dann gilt $d(p, c(t)) \leq d(\tilde{p}, \tilde{c}(t))$ für alle $t \geq 0$ falls $\kappa \leq 0$ und für alle $0 \leq t < \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$ falls $\kappa > 0$. Gilt hinsichtlich der Winkel strikte Ungleichheit (also im dritten Punkt), so gilt auch strikte Ungleichheit hinsichtlich der Abstände.

Beweis. Bevor wir beginnen, sei angemerkt, dass wir im Fall $\kappa > 0$ aufgrund der Theorem von Bonnet-Myers (Satz 2.26) und Cheng (siehe ??) stets von $b < \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$ ausgehen dürfen.

Setze $r := d(p, \cdot)$ und $\tilde{r} := d(\tilde{p}, \cdot)$ und setze weiter

$$f := \text{md}_\kappa \circ r, \quad \rho := f \circ c \quad \text{und} \quad \tilde{f} := \text{md}_\kappa \circ \tilde{r}, \quad \tilde{\rho} := \tilde{f} \circ \tilde{c} \quad \text{und} \quad \psi := \rho - \tilde{\rho}.$$

Wir möchten zeigen, dass $\psi < 0$ gilt (auf dem jeweils angegebenen Bereich). Aus der zweiten Voraussetzungen folgt $\psi(0) \leq 0$. (sogar $\psi(0) = 0$). Wir nehmen zunächst die folgenden zusätzlichen Annahmen an:

(Z1) Es gelten $c(0) \notin \text{Cut}(p)$ und $\tilde{c}(0) \notin \text{Cut}(\tilde{p})$.

(Z2) Es gilt $\langle \dot{c}(0), \dot{c}_0(0) \rangle < \langle \dot{\tilde{c}}(0), \dot{\tilde{c}}_0(0) \rangle$.

4.2. Der Satz von Toponogov (Schnittkrümmungsvergleich)

Aufgrund der ersten Annahme sind dann ρ und $\tilde{\rho}$ und somit ψ nahe 0 differenzierbar. Weiter gilt

$$\rho'(0) = (\text{md}_\kappa \circ r \circ c)'(0) = \text{md}'_\kappa(r(c(0))) \cdot \langle \text{grad } r|_{c(0)}, \dot{c}(0) \rangle = \text{sn}_\kappa(b) \cdot \langle -\dot{c}_0(0), \dot{c}(0) \rangle$$

und analog $\tilde{\rho}'(0) = \text{sn}_\kappa(\tilde{b}) \cdot \langle -\dot{\tilde{c}}(0), \dot{\tilde{c}}_0(0) \rangle$. Aufgrund der zweiten Annahme bzw. (Z2) folgt

$$\psi'(0) = \rho'(0) - \tilde{\rho}'(0) = \text{sn}_\kappa(b) \left(-\langle \dot{c}_0(0), \dot{c}(0) \rangle + \langle \dot{\tilde{c}}(0), \dot{\tilde{c}}_0(0) \rangle \right) < 0.$$

Beachte, dass $\text{sn}_\kappa(b) > 0$ gilt (für $\kappa > 0$ wegen $b < \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$).

Proposition 4.9 erlaubt es, eine Aussage über die zweite Ableitung von ψ zu machen: Wegen $K \geq \kappa$ gilt nämlich einerseits $\text{Hess } f \leq (1 - \kappa f)g$ im Barrierensinne, woraus direkt folgt, dass $\rho'' \leq (1 - \kappa \rho)$ im Barrierensinne gilt. Andererseits gilt im Modellraum $\text{Hess } \tilde{f} = (1 - \kappa \tilde{f})\tilde{g}$ und somit $\tilde{\rho}'' = (1 - \kappa \tilde{\rho})$. Es folgt, dass

$$\psi'' \leq -\kappa \psi \quad \text{im Barrierensinne gilt.} \quad (*)$$

Zusammenfassend gelten also für ψ :

1. $\psi(0) = 0$
2. $\psi'(0) < 0$
3. $\psi'' \leq -\kappa \psi$ im Barrierensinne.

Wir zeigen per Widerspruchsbeweis, dass $\psi < 0$ gilt, und nehmen dazu an, dass $\psi \not< 0$ gilt. Nach 1. und 2. gilt $\psi(t) < \psi(0) = 0$ für $t > 0$ hinreichend klein. Aus der Annahme $\psi \not< 0$ folgt deshalb, dass ψ eine Nullstelle bei $T > 0$ hat und auf $(0, T)$ negativ ist und ein lokales Minimum negativen Wertes hat.

Für $\kappa \leq 0$ kann man hieraus relativ schnell einen Widerspruch zu 3. ableiten (Übung).

Berachte den Fall $\kappa > 0$: Hier gilt $-\kappa \psi(t_0) > 0$, weshalb 3. nicht direkt zu einem Widerspruch führt. Ein Trick hilft weiter: Für $\varepsilon > 0$ definiere

$$\eta_\varepsilon : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \eta_\varepsilon(t) := \text{sn}_\kappa(t + \varepsilon) - \text{sn}_\kappa\left(\frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Für $\varepsilon > 0$ hinreichend klein gilt $\eta_\varepsilon > 0$ auf $[0, T]$ (beachte $T < \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$). Somit folgt, dass $\frac{\psi}{\eta_\varepsilon} < 0$ auf $(0, T)$ gilt. Da der Quotient genau wie ψ in 0 und T verschwindet, muss somit auch $\frac{\psi}{\eta_\varepsilon}$ in einem Punkt $t_0 \in (0, L)$ ein lokales Minimum negativen Wertes haben.

Wegen 3. können wir zu jedem $\delta > 0$ (hinreichend klein) eine obere Barriere ψ_δ von ψ in t_0 mit $\psi''_\delta(t_0) \leq -\kappa \psi(t_0) + \delta$ wählen. Für t nahe t_0 gilt dann (beachte $\eta_\varepsilon > 0$)

$$\frac{\psi_\delta(t)}{\eta_\varepsilon(t)} \geq \frac{\psi(t)}{\eta_\varepsilon(t)} \geq \frac{\psi(t_0)}{\eta_\varepsilon(t_0)} = \frac{\psi_\delta(t_0)}{\eta_\varepsilon(t_0)},$$

4. Vergleichsgeometrie

also hat auch $\frac{\psi_\delta}{\eta_\varepsilon}$ in t_0 ein lokales Minimum. Somit gilt $(\frac{\psi_\delta}{\eta_\varepsilon})''(t_0) \geq 0$. Andererseits gilt aber mit $\eta_\varepsilon'' = -\kappa\eta_\varepsilon - \kappa \operatorname{sn}_\kappa \frac{\varepsilon}{2}$

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\psi_\delta}{\eta_\varepsilon}\right)''(t_0) &= \left(\frac{\psi'_\delta}{\eta_\varepsilon} - \frac{\psi_\delta \eta'_\varepsilon}{\eta_\varepsilon^2}\right)'(t_0) \\
 &= \frac{\psi''_\delta(t_0)}{\eta_\varepsilon(t_0)} - 2\frac{\psi'_\delta(t_0)\eta'_\varepsilon(t_0)}{\eta_\varepsilon(t_0)^2} - \frac{\psi_\delta(t_0)\eta''_\varepsilon(t_0)}{\eta_\varepsilon(t_0)^2} + 2\frac{\psi_\delta(t_0)\eta'_\varepsilon(t_0)^2}{\eta_\varepsilon(t_0)^3} \\
 &= \frac{\psi''_\delta(t_0)}{\eta_\varepsilon(t_0)} - 2\frac{\eta'_\varepsilon(t_0)}{\eta_\varepsilon(t_0)} \underbrace{\left(\frac{\psi_\delta}{\eta_\varepsilon}\right)'(t_0)}_{=0} - \frac{\psi_\delta(t_0)\eta''_\varepsilon(t_0)}{\eta_\varepsilon(t_0)^2} \\
 &\leq -\kappa\frac{\psi(t_0)}{\eta_\varepsilon(t_0)} + \frac{\delta}{\eta_\varepsilon(t_0)} - \frac{\psi(t_0)}{\eta_\varepsilon(t_0)^2}(-\kappa\eta_\varepsilon(t_0) - \kappa \operatorname{sn}_\kappa \frac{\varepsilon}{2}) \\
 &= \frac{\delta}{\eta_\varepsilon(t_0)} + \underbrace{\kappa\frac{\psi(t_0)}{\eta_\varepsilon^2(t_0)} \operatorname{sn}_\kappa \frac{\varepsilon}{2}}_{<0}.
 \end{aligned}$$

Für $\delta > 0$ hinreichend klein ist dies also negativ, womit ein Widerspruch erreicht ist.

Es bleibt noch, die zusätzlichen Annahmen (Z1) und (Z2) zu rechtfertigen: Gilt (Z1) nicht, so betrachte anstatt von c die Geodäte welche in $c_0(\varepsilon)$ mit Anfangsgeschwindigkeit gleich dem Paralleltransport von $\dot{c}(0)$ längs c_0 startet, und genauso im Vergleichsraum. Und gilt auch (Z2) nicht, so „drehe“ die Anfangsgeschwindigkeit in M einfach ein bisschen. Für *jedes* feste t gelten dann die entsprechenden Ungleichungen zwischen den Abständen (zu den deformierten Geodäten). Aufgrund der Stetigkeit der Exponentialfunktionen und der Abstandsfunktionen gelten die Ungleichungen dann auch noch, wenn man ε und den Drehwinkel gegen 0 gehen lässt. Man beachte, dass dabei jedoch die strikte Ungleichung zwischen den Abständen verloren gehen kann. \square

Zum Abschluss reformulieren wir die Aussage von Proposition 4.10 in etwas geometrischeren Termen und erhalten so den *Satz von Toponogov*. In diesem tauchen folgende Begriffe auf:

- Ein (*geodätisches*) *Gelenk* (in Englisch: *hinge*) besteht aus zwei nichtkonstanten Einheitsgeodäten $c : [0, b] \rightarrow M$ und $c_0 : [0, b_0] \rightarrow M$ mit gleichem Anfangspunkt. Der Winkel zwischen $\dot{c}(0)$ und $\dot{c}_0(0)$ wird *Gelenkwinkel* genannt. Eine minimale Geodäte zwischen den Endpunkten von $c(0)$ und $c_0(0)$ wird als *abschließende Seite* des Gelenks bezeichnet.
- Ein (*geodätisches*) *Dreieck* besteht aus drei (nicht notwendigerweise verschiedenen) Punkte und zu je zwei dieser Punkte einer nichtkonstanten verbindenden Geodäten.

Man beachte, dass auch drei (nichtkonstante) Geodätenstücke mit denselben Anfangs- und Endpunkten ein geodätisches Dreieck bilden.

4.2. Der Satz von Toponogov (Schnittkrümmungsvergleich)

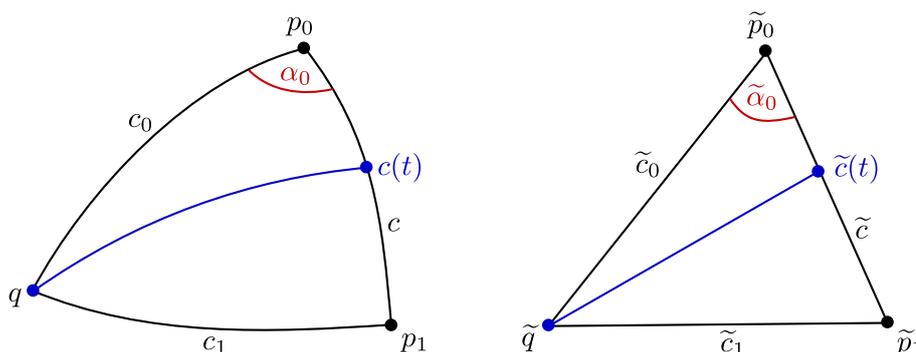


Abbildung 4.2.: Der Dreiecksvergleichssatz von Toponogov.

Im Beweis sowie später in der Anwendung des Satzes von Toponogov wird es wichtig sein, dass zu vorgegeben Längen (oder Winkeln) stets Gelenke bzw. Dreiecke mit genau diesen Längen (oder Winkeln) in den Modellräumen existieren, die man zum Vergleich heranziehen kann.

Lemma 4.11 (Existenz von Vergleichsdreiecken und -gelenken). *Sei M vollständig und die Schnittkrümmung erfülle $K \geq \kappa$ für ein $\kappa \in \mathbb{R}$.*

- (i) *Für jedes Gelenk in M existiert ein Gelenk in M_κ^n mit denselben Seitenlängen und demselben Winkel („Vergleichsgelenk“).*
- (ii) *Für jedes Dreieck in M , in dem jede Seitenlänge höchstens so groß wie die Summe der beiden anderen ist und für $\kappa > 0$ zudem der Umfang weniger als $2\pi/\sqrt{\kappa}$ beträgt, existiert ein Dreieck in M_κ^n mit denselben Seitenlängen („Vergleichsdreieck“).²*

Ist eine Seite des Gelenks M minimierend, so ist auch die entsprechende Seite des Vergleichsgelenks in M_κ^n minimierend. Die Seitenlängen des Vergleichsdreiecks sind stets minimierend.

Beweis. Teil (i) ist klar. Für (ii) beachte zunächst, dass man statt M_κ^n stets M_κ^2 nehmen kann, da ein Dreieck stets „in einer Hyperfläche liegt“. Nun konstruiere man ein Dreieck in M_κ^2 wie aus der Schule bekannt, indem man zunächst eine der Seiten konstruiert und dann die geodätischen Kreise um die beiden Endpunkte der Seite mit Radien gleich den anderen gewünschten Seitenlängen schneidet. Für $\kappa \leq 0$ sieht man direkt, dass diese einen Schnittpunkt haben. Für $\kappa > 0$ beachte man, dass für die Seitenlängen ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 wegen $\ell_1 \leq \ell_2 + \ell_3$ und $\ell_1 + \ell_2 + \ell_3 < 2\pi/\sqrt{\kappa}$ auch $\ell_1 < \pi/\sqrt{\kappa}$ gilt und analog auch $\ell_2, \ell_3 < \pi/\sqrt{\kappa}$. Deshalb sind die Punkte der konstruierten Seite auf der Sphäre keine Antipodenpunkte zueinander und auch die beiden Kreise um die Endpunkte der Seite sind „echte Kreise“ (also keine Punkte oder gar leer). Damit sieht man auch hier, dass sich die beiden Kreise schneiden. \square

²Die Bedingung für die Seitenlängen in M ist automatisch erfüllt, wenn die Seiten minimieren.

4. Vergleichsgeometrie

Theorem 4.12 (Toponogov). *Sei (M, g) vollständig und für die Schnittkrümmung gelte $K \geq \kappa$ für ein $\kappa \in \mathbb{R}$.*

- (A) *Sei c, c_0 ein Gelenk in M mit Winkel α , wobei c_0 minimal sei und im Fall $\kappa > 0$ zudem $\ell(c) \leq \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$ gelte. Sei \tilde{c}, \tilde{c}_0 ein Gelenk in M_κ^n mit demselben Winkel α und mit $\ell(\tilde{c}) = \ell(c)$ sowie $\ell(\tilde{c}_0) = \ell(c_0)$. Ist c_1 eine abschließende Seite des Gelenks in M und \tilde{c}_1 eine abschließende Seite des Gelenks in M_κ^n , so gilt $\ell(c_1) \leq \ell(\tilde{c}_1)$.*
- (B) *Sei Δ ein geodätisches Dreieck in M mit Eckpunkten p_0, p_1, q und Seiten c_0 und c_1 von p_0 bzw. p_1 nach q sowie c von p_0 nach p_1 . Es gelte $q \notin \{p_0, p_1\}$ und c_0 und c_1 seien minimierend. Weiter gelte $\ell(c) \leq \ell(c_0) + \ell(c_1)$ und im Falle $\kappa > 0$ zudem $\ell(c) \leq \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$.³ Sei $\tilde{\Delta}$ ein geodätisches Dreieck in M_κ^n mit Eckpunkten $\tilde{p}_0, \tilde{p}_1, \tilde{q}$ und Seiten \tilde{c}_0 und \tilde{c}_1 von \tilde{p}_0 bzw. \tilde{p}_1 nach \tilde{q} sowie \tilde{c} von \tilde{p}_0 nach \tilde{p}_1 , für die $\ell(\tilde{c}_0) = \ell(c_0)$, $\ell(\tilde{c}_1) = \ell(c_1)$ und $\ell(\tilde{c}) = \ell(c)$ gelten. Dann gelten:*
- (i) *Der Innenwinkel von Δ in p_0 bzw. p_1 ist mindestens so groß wie der von $\tilde{\Delta}$ in \tilde{p}_0 bzw. \tilde{p}_1 .*
- (ii) *Es gilt $d(q, c(t)) \geq d(\tilde{q}, \tilde{c}(t))$ für alle $t \in [0, \ell(c)]$.*

Beweis. Teil (A) folgt direkt aus Proposition 4.10.

Zu Teil (B): Aussage (ii) lässt sich ähnlich wie Proposition 4.10 beweisen. Man betrachtet wieder die Differenz der (modifizierten) Abstandsfunktionen zu q bzw. \tilde{q} längs c bzw. \tilde{c} und möchte zeigen, dass diese nichtnegativ ist. Da c_0, c_1 sowie \tilde{c}_0, \tilde{c}_1 minimierend und $\ell(c_0) = \ell(\tilde{c}_0)$ sowie $\ell(c_1) = \ell(\tilde{c}_1)$ gelten, ist die Differenz der Abstände in den Endpunkten von c gleich 0. Wäre die Abstandsdifferenz irgendwo negativ, müsste sie folglich ein (inneres) lokales Minimum von negativem Wert haben. Dies kann man nun genauso wie im Beweis von Proposition 4.10 zu einem Widerspruch führen.

Aussage (i) lässt sich mit etwas „Trigonometrie“ in M_κ^n aus (ii) ableiten. Dazu zeigen wir zunächst:

Sehnenvergleich: Für alle $s \in [0, \ell(c)]$, für die c auf $[0, s]$ minimiert, und für alle $t \in [0, \ell(c_0)]$ gilt $d(\tilde{c}_0(t), \tilde{c}(s)) \leq d(c_0(t), c(s))$.

Setze für solche s und t zunächst $p_s := c(s)$ und betrachte das Dreieck mit Eckpunkten p_0, p_s, q und Seiten $c_0, c|_{[0, s]}$ und c_s , wobei c_s eine beliebige minimierende Geodäte zwischen $c(s)$ und q sei. Ergänze in M_κ^n die Punkte \tilde{p}_0, \tilde{q} durch einen dritten Punkt \tilde{p}_s zu einem Vergleichsdreieck (gleiche Seitenlängen), was wegen Lemma 4.11 möglich ist. In diesem Dreieck wenden wir (ii) an und erhalten

$$d(\tilde{p}_s, \tilde{c}_0(t)) \leq d(c(s), c_0(t)). \quad (*)$$

Andererseits wissen wir nach (ii) ebenfalls (betrachte wieder die ursprünglichen Dreiecke), dass $d(\tilde{q}, \tilde{c}(s)) \leq d(q, c(s)) = d(\tilde{q}, \tilde{p}_s)$ gilt. Da c und damit auch \tilde{c} auf $[0, s]$ minimiert, gilt weiter $d(\tilde{p}_0, \tilde{p}_s) = d(p_0, c(s)) = s = d(\tilde{p}_0, \tilde{c}(s))$. Deshalb sind in den beiden Dreiecken

³Das ist beides mit Sicherheit dann erfüllt, wenn auch c minimierend ist.

4.2. Der Satz von Toponogov (Schnittkrümmungsvergleich)

in M_κ^n mit Eckpunkten $\tilde{c}_0(t), \tilde{p}_0, \tilde{c}(s)$ bzw. $\tilde{c}_0(t), \tilde{p}_0, \tilde{p}_s$ die beiden Seiten, die sich in \tilde{p}_0 treffen, gleich lang. Aus der Längenbeziehung für die dritte Seite und des monotonen Zusammenhangs zwischen Seitenlänge und gegenüberliegendem Winkel (Kosinus-Satz 4.13) folgt:

$$\angle \tilde{c}(t) \tilde{p}_0 \tilde{c}(s) = \angle \tilde{q} \tilde{p}_0 \tilde{c}(s) \leq \angle \tilde{q} \tilde{p}_0 \tilde{p}_s = \angle \tilde{c}(t) \tilde{p}_0 \tilde{p}_s.$$

Nochmalige Anwendung des Zusammenhangs zwischen Seitenlänge und gegenüberliegendem Winkel auf die Dreiecke mit Eckpunkten $\tilde{c}(t), \tilde{p}_0, \tilde{c}(s)$ und $\tilde{c}(t), \tilde{p}_0, \tilde{p}_s$ ergibt schließlich

$$d(\tilde{c}_0(t), \tilde{c}(s)) \leq d(\tilde{c}_0(t), \tilde{p}_s) = d(c_0(t), c(s)).$$

Nun zeigen wir die eigentliche Aussage über die Winkel. Betrachte dazu die beiden Funktionen $f(s) := d(c_0(s), c(s))^2$ und $\tilde{f}(s) := d(\tilde{c}_0(s), \tilde{c}(s))^2$. Für $s > 0$ hinreichend klein gilt $f(s) \geq \tilde{f}(s)$ nach dem Sehnenvergleich.

Wir machen eine Taylorentwicklung der beiden Funktionen. Zunächst gelten $f(0) = 0$ und $\tilde{f}(0) = 0$. Für die Berechnung der Ableitung benutzen wir geodätische Variationen: Für $s > 0$ hinreichend klein liegen $c(s), c_0(s)$ in einer konvexen Umgebung von p_0 . Somit können wir die geodätische Variation (definiert für $s > 0$ hinreichend klein)

$$\sigma(s, t) := \exp_{c_0(s)} \left(t \exp_{c_0(s)}^{-1}(c(s)) \right)$$

betrachten. Wiederum für $s > 0$ hinreichend klein ist $\sigma(s, \cdot)$ minimierend von $c_0(s)$ nach $c(s)$, also gilt $f(s) = |\partial_t \sigma(s, \cdot)|^2$, wobei die rechte Seite von t unabhängig ist, da σ eine geodätische Variation ist. Damit kann man nun Ableitungen von f ausrechnen und findet

$$\begin{aligned} \dot{f} &= 2 \langle \nabla_{\partial_s} \partial_t \sigma, \partial_t \sigma \rangle, \\ \ddot{f} &= 2 \langle \nabla_{\partial_s}^2 \partial_t \sigma, \partial_t \sigma \rangle + 2 \langle \nabla_{\partial_s} \partial_t \sigma, \nabla_{\partial_s} \partial_t \sigma \rangle. \end{aligned}$$

Beachte nun zunächst, dass $\sigma(0, t) = p_0$ konstant ist und somit $\partial_t \sigma(0, t) = 0$ gilt. Damit folgt direkt $\dot{f}(0) = 0$ und auch der erste Terme von $\ddot{f}(0)$ fällt raus.

Da σ eine geodätische Variation ist, erfüllt das Variationsfeld $\partial_s \sigma$ weiter die Jacobi-gleichung $\nabla_{\partial_t}^2 \partial_s \sigma = -R(\partial_s \sigma, \partial_t \sigma) \partial_t \sigma$. Wegen $\partial_t \sigma(0, t) = 0$ folgt somit $\nabla_{\partial_t}^2 \partial_s \sigma(0, t) = 0$. Da $\sigma(0, \cdot)$ konstant ist, bedeutet dies

$$\partial_s \sigma(0, t) = \partial_s \sigma(0, 0) + t(\partial_s \sigma(0, 1) - \partial_s \sigma(0, 0)).$$

Nun gelten weiter $\sigma(s, 0) = c_0(s)$ und $\sigma(s, 1) = c_1(s)$ und somit $\partial_s \sigma(s, 0) = \dot{c}_0(s)$ und $\partial_s \sigma(s, 1) = \dot{c}_1(s)$. Damit folgt $\partial_s \sigma(0, t) = \dot{c}_0(0) - t(\dot{c}_1(0) - \dot{c}_0(0))$. Es folgt nun

$$\ddot{f}(0) = 2 \langle \nabla_{\partial_s} \partial_t \sigma, \nabla_{\partial_s} \partial_t \sigma \rangle(0, 0) = 2 \langle \nabla_{\partial_t} \partial_s \sigma, \nabla_{\partial_t} \partial_s \sigma \rangle(0, 0) = 2|\dot{c}_1(0) - \dot{c}_0(0)|^2.$$

Die Taylorformel liefert also wegen $f(0) = \dot{f}(0) = 0$

$$f(s) = s^2 |\dot{c}_1(0) - \dot{c}_0(0)|^2 + \mathcal{O}(s^3).^4$$

⁴Die nächste nichtverschwindende Ordnung ist s^4 und enthält (wenig überraschend) einen Schnittkrümmungsterm als Koeffizient.

4. Vergleichsgeometrie

Eine analoge Rechnung gilt natürlich in M_κ^n , sodass wir für $s \rightarrow 0$ aus dem Sehnenvergleich $f(s) \geq \tilde{f}(s)$ die Abschätzung $|\dot{c}_0(0) - \dot{c}(0)|^2 \geq |\tilde{c}_0(0) - \tilde{c}(0)|^2$ erhalten. Schreibt man die beiden Seiten aus und nutzt, dass alle Geodäten nach Bogenlänge parametrisiert sind, so folgt $\langle \dot{c}_0(0), \dot{c}(0) \rangle \leq \langle \tilde{c}_0(0), \tilde{c}(0) \rangle$. Daraus folgt $\alpha_0 \geq \tilde{\alpha}_0$. \square

Proposition 4.13 (Kosinus-Satz). *Sei Δ ein geodätisches Dreieck in M_κ^n mit Seitenlängen a, b, c und sei α der Winkel, welche der Seite mit Länge a gegenüber liegt. Dann gilt*

$$\text{md}_\kappa(a) = \text{md}_\kappa(b - c) + \text{sn}_\kappa(b) \text{sn}_\kappa(c) \cdot (1 - \cos(\alpha)). \quad (4.11)$$

Speziell für $\kappa = 0, \pm 1$ ergibt sich

$$\text{Für } \kappa = 0 : \quad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha, \quad (4.12)$$

$$\text{Für } \kappa = 1 : \quad \cos(a) = \cos(b) \cos(c) + \sin(b) \sin(c) \cos(\alpha), \quad (4.13)$$

$$\text{Für } \kappa = -1 : \quad \cosh(a) = \cosh(b) \cosh(c) - \sinh(b) \sinh(c) \cos(\alpha). \quad (4.14)$$

Beweis. Sei $p \in M_\kappa^n$ und sei $c : [0, L] \rightarrow M_\kappa^n$ eine Einheitsgeodäte. Setze $\rho := f_\kappa \circ c$, wobei $f_\kappa = \text{md}_\kappa \circ d(p, \cdot)$ wieder die modifizierte Abstandsfunktion zu p ist. Es gelten

$$\dot{\rho} = \langle \dot{c}, \text{grad } f_\kappa \rangle, \quad \ddot{\rho} = 1 - \kappa \rho.$$

Setze weiter

$$f(t) := \text{md}_\kappa(b - t) + \text{sn}_\kappa(b) \text{sn}_\kappa(t) \cdot (1 - \cos(\alpha)).$$

Dann gelten (beachte Lemma ??):

$$\dot{f}(t) = -\text{sn}_\kappa(b - t) + \text{sn}_\kappa(b) \text{cs}_\kappa(t) (1 - \cos(\alpha)),$$

$$\ddot{f}(t) = \underbrace{\text{cs}_\kappa(b - t)}_{=1 - \kappa \text{md}_\kappa(b - t)} - \text{sn}_\kappa(b) \kappa \text{sn}_\kappa(t) (1 - \cos(\alpha)) = 1 - \kappa f(t).$$

Also erfüllen f und ρ dieselbe DGL zweiter Ordnung. Weiter gelten:

$$f(0) = -\text{md}_\kappa(b) = \rho(0),$$

$$\dot{f}(0) = -\text{sn}_\kappa(b) + \text{sn}_\kappa(b) (1 - \cos \alpha) = -\text{sn}_\kappa(b) \cos(\alpha) = \dot{\rho}(0).$$

Beachte dabei $\dot{\rho}(0) = \dots$

Somit gilt $f = \rho$. Hieraus folgt die Behauptung. \square

4.3. Der Sphärensatz

Ziel dieses Abschnitts ist der Beweis des folgenden Satzes:

Theorem 4.14 (Topologischer Sphärensatz). *Sei (M, g) eine einfach-zusammenhängende, vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit. Für die Schnittkrümmung K gelte*

$$\frac{1}{4} < \kappa \leq K \leq 1$$

für ein $\kappa > 0$. Dann ist M homöomorph zu einer Sphäre.

Vorbereitungen: Bevor wir mit dem Beweis beginnen, tragen wir zusammen, was uns unter den Voraussetzungen des Sphärensatzes bekannt ist:

- Wegen $K \geq \kappa > \frac{1}{4}$ ist M nach dem Satz von Bonnet Myers (Theorem 2.26) kompakt und es gilt

$$\text{diam}(M) \leq \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}} < 2\pi.$$

- Wegen $K \leq 1$ sind nach dem Jacobifeldvergleich von Rauch (Übungsaufgabe 7.3) keine Punkte in M von Abstand kleiner als π längs einer verbindenden minimierenden Geodäte zueinander konjugiert. Somit ist für jedes $p \in M$ die Exponentialabbildung \exp_p auf $B(0, \pi)$ ein lokaler Diffeomorphismus um jeden Punkt.

Die Voraussetzungen, dass M einfach zusammenhängend ist und die Schnittkrümmung positiv ist, erlauben eine Verschärfung des zweiten Punkts, zu folgendem Satz, den wir hier leider aus Zeitgründen nicht mehr behandeln können und auf die Literatur verweisen (z.B. [7, Theorem 6.5.5]).

Theorem 4.15 (Klingenberg). *Sei (M, g) einfach zusammenhängend und vollständig. Für die Schnittkrümmung gelte $1/4 < \kappa \leq K \leq 1$. Dann gilt $\text{inj}(M) \geq \pi$.*

Man beachte, dass natürlich $\text{diam}(M) \geq \text{inj}(M)$ gilt. Somit wissen wir, dass unter den Voraussetzungen des Sphärensatzes gilt:

$$\pi \leq \text{diam}(M) < 2\pi.$$

Eine wichtige Rolle wird zudem spielen, dass wegen $\frac{1}{4} < \kappa$ gilt:

$$\frac{\pi}{2\sqrt{\kappa}} < \pi.$$

Aus diesem Grund können wir ein $r > 0$ wählen mit

$$\frac{\pi}{2\sqrt{\kappa}} < r < \pi.$$

Wegen $\text{inj}(M) \geq \pi$ ist ein metrischer Ball von Radius r dann stets geodätisch.

Beweisidee Da M kompakt ist, können wir Punkte $p, q \in M$ mit maximalem Abstand $d(p, q) = \text{diam}(M)$ wählen. Betrachte nun für ein $r \in (\frac{\pi}{2\sqrt{\kappa}}, \pi)$ die Bälle $B(p, r)$ und $B(q, r)$. Mit Hilfe des Satzes von Toponogov werden wir zeigen, dass $M = B(p, r) \cup B(q, r)$ gilt (Lemma 4.18). Damit liegen insbesondere alle Punkte, die gleichen Abstand von p und q haben, in $B(p, r) \cap B(q, r)$, d.h.

$$N := \{x \in M : d(p, x) = d(q, x)\} \subset B(p, r) \cap B(q, r).$$

4. Vergleichsgeometrie

Wir werden weiter zeigen, dass N eine Art „Äquator“ in M ist, d.h. gemeinsamer Rand zweier (topologischer) Bälle, die längs N „verklebt“ werden, so wie auf der Sphäre die obere und untere Hemisphäre längs des Äquators verklebt sind.

Wir beginnen nun mit den Details. Wegen $r < \pi \leq \text{inj}(M) \leq \text{diam}(M) = d(p, q)$ sind die Abstandsfunktionen $d(p, \cdot)$ und $d(q, \cdot)$ und damit auch die Funktion

$$f : M \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad f(x) := d(q, x) - d(p, x) \quad (4.15)$$

auf $B(p, r) \cap B(q, r)$ glatt. Setze $D^+ := f^{-1}([0, \infty))$ und $D^- := f^{-1}((-\infty, 0])$, dann gilt

$$N = f^{-1}(\{0\}) = D^+ \cap D^- .$$

Proposition 4.16 (Äquator). *Sei M einfach zusammenhängend und vollständig. Für die Schnittkrümmung gelte $1/4 < \kappa \leq K \leq 1$. Seien $p, q \in M$ mit $d(p, q) = \text{diam}(M)$.*

- (i) $N \subset M$ ist eine glatte, kompakte Hyperfläche und in $B(p, \pi) \cap B(q, \pi)$ enthalten.
- (ii) $N_p := (\exp_p|_{B(0, \pi)})^{-1}(N) \subset T_p M$ sowie $N_q := (\exp_q|_{B(0, \pi)})^{-1}(N) \subset T_q M$ sind glatte kompakte Hyperflächen, die von \exp_p bzw. \exp_q diffeomorph auf N abgebildet werden. Die Abbildungen $s_p : N_p \rightarrow S_p M$, $s_p(v) = v/|v|$ und $s_q : N_q \rightarrow S_q M$, $s_q(w) = w/|w|$ sind Homöomorphismen und die Abbildungen $t_p : S_p M \rightarrow (0, \pi)$, $t_p(v) = |s_p^{-1}(v)|$ und $t_q : S_q M \rightarrow (0, \pi)$, $t_q(v) = |s_q^{-1}(v)|$ sind stetig.

(iii) Die Mengen

$$D_T^+ := \{tv : v \in S_p M \text{ und } t \in [0, t_p(v)]\},$$

$$D_T^- := \{tv : v \in S_q M \text{ und } t \in [0, t_q(v)]\}$$

sind homöomorph zu abgeschlossenen Bällen und werden von \exp_p bzw. \exp_q homöomorph auf D^+ bzw. D^- abgebildet.⁵

Bevor wir diese Proposition beweisen (was ein paar Lemmas benötigt), zeigen wir, wie mit dieser Proposition der Sphärensatz bewiesen werden kann.

Beweis des Sphärensatzes 4.14. Die Idee ist wie schon gesagt, den Homöomorphismus über das „Verkleben“ von D^+ und D^- längs N bzw. der oberen und unteren Hemisphäre auf S^n längs des Äquators zu konstruieren. Es ist bequem, dies indirekt zu tun.

Betrachte zunächst die Sphäre: Fixiere $x \in S^n$ (z.B. den Nordpol) und betrachte die stetige, surjektive Abbildung

$$\varphi : S_x S^n \times [0, 1] \rightarrow S^n, \quad (v, t) \mapsto \exp_x(t\pi v).$$

Betrachte den Quotienten $(S_x S^n \times [0, 1])/\varphi$, in dem Punkte mit gleichem Bild unter φ identifiziert werden. Die induzierte Abbildung $\bar{\varphi} : (S_x S^n \times [0, 1])/\varphi \rightarrow S^n$ ist stetig und bijektiv. Aus allgemeinen Argumenten folgt, dass $\bar{\varphi}$ sogar ein Homöomorphismus ist:

⁵Man kann hier homöomorph auch durch diffeomorph ersetzen, wenn man den Begriff der Mannigfaltigkeit mit Rand kennt.

4.3. Der Sphärensatz

- Da $S_x S^n \times [0, 1]$ kompakt und S^n Hausdorff ist, ist φ abgeschlossen, d.h. bildet abgeschlossene Mengen auf abgeschlossene Mengen ab.

(Eine abgeschlossene Menge im Definitionsbereich ist kompakt; deren Bild ist dann wieder kompakt; eine kompakte Teilmenge eines Hausdorffraums ist abgeschlossen.)

- Aus der Definition der Quotiententopologie folgt direkt, dass damit auch $\bar{\varphi}$ abgeschlossen ist. Somit ist $\bar{\varphi}^{-1}$ stetig, also $\bar{\varphi}$ ein Homöomorphismus.

Die vorherige Proposition erlaubt uns, diese Konstruktion auf M zu imitieren. Seien dazu $p, q \in M$ mit maximalem Abstand $d(p, q) = \text{diam}(M)$ und sei die sonstige Notation wie in Proposition 4.16. Sei weiter

$$h := s_q \circ (\exp_q|_{B(0, \pi)})^{-1} \circ \exp_p \circ s_p^{-1} : S_p M \rightarrow S_q M.$$

Definiere nun

$$\psi : S_p M \times [0, 1] \rightarrow M, \quad (v, t) \mapsto \begin{cases} \exp_p(t \cdot 2t_p(v) \cdot v) & \text{für } t \in [0, \frac{1}{2}], \\ \exp_q((1-t) \cdot 2t_q(h(v)) \cdot h(v)) & \text{für } t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Nach Definition von h gilt $\exp_q(t_q(h(v))h(v)) = \exp_p(t_p(v)v)$ für alle $v \in S_p M$, weshalb ψ wohldefiniert ist. Da t_p und h t_p und h nach Proposition 4.16 (ii) stetig sind, ist ψ stetig (beachte, dass die obere und die untere Abbildung jeweils stetig sind und auf der abgeschlossenen Menge $S_p M \times \{\frac{1}{2}\}$ übereinstimmen).

Weiter gelten $\psi(S_p M \times [0, \frac{1}{2}]) = D^+$ und $\psi(S_p M \times [\frac{1}{2}, 1]) = D^-$ nach Prop. 4.16 (iv). Wegen $M = D^+ \cup D^-$ ist somit ψ surjektiv. Analog wie für φ folgt, dass die induzierte Abbildung $\bar{\psi} : (S_p M \times [0, 1])/\psi \rightarrow M$ ein Homöomorphismus, wobei die Quotientenbildung wieder alle Punkte mit demselben Bild unter ψ identifiziert.

Da die beiden „Zylinder“ $S_x S^n \times [0, 1]$ und $S_p M \times [0, 1]$ homöomorph sind folgt die Homöomorphie von S^n und M , wenn wir zeigen können, dass auch die Quotienten $(S_x S^n \times [0, 1])/\varphi$ und $(S_p M \times [0, 1])/\psi$ homöomorph sind. Dazu zeigen wir, dass φ und ψ machen „dieselben“ Identifikation machen:

Bei der Quotientenbildung nach φ werden lediglich der „Deckel“ und der „Boden“ des Zylinders $S_x S^n \times [0, 1]$ zu je einem Punkt identifiziert. Unter ψ ist dies genauso, denn:

- Dass „Deckel“ und „Boden“ zu je einem Punkt identifiziert werden folgt wegen $\psi(S_p M \times \{0\}) = \{p\}$ und $\psi(S_p M \times \{1\}) = \{q\}$.
- Nach Proposition 4.16 (iv) ist ψ auf $S_p M \times (0, \frac{1}{2}]$ und auf $S_p M \times (\frac{1}{2}, 1)$ injektiv und es gelten $\psi(S_p M \times (0, \frac{1}{2}]) = D^+ \setminus \{p\}$ und $\psi(S_p M \times (\frac{1}{2}, 1)) = D^- \setminus (\{q\} \cup N)$. Da diese Mengen disjunkt sind, ist somit ψ auf $S_p M \times (0, 1)$ injektiv.

□

Wir holen nun noch den Beweis von Proposition 4.16 nach. Dazu beweisen wir nacheinander mehrere Aussagen über Punkte maximalen Abstands.

4. Vergleichsgeometrie

Lemma 4.17. *Sei M vollständig und seien $p, q \in M$ mit $d(p, q) = \text{diam}(M)$. Zu jedem $v \in T_q M$ existiert eine minimierende Einheitsgeodäte c von q nach p mit $\langle \dot{c}(0), v \rangle \geq 0$.*

Beweis. Sei $v \in T_q M$ und sei c_v die eindeutige Geodäte mit $\dot{c}_v(0) = v$. Zwecks Widerspruch nehmen wir an, die Behauptung sei falsch. Dann gilt:

(*) : Es gibt $T > 0$, sodass für alle $t \in (0, T)$ und jede minimierende Geodäte c_t von $c_v(t)$ nach p stets $\langle \dot{c}_t(0), \dot{c}_v(t) \rangle < 0$ gilt.

Ansonsten könnte man nämlich eine Folge $(t_n)_n$ in $(0, \infty)$ mit $t_n \rightarrow 0$ und eine Folge von Einheitsgeodäten $(c_{t_n})_n$ von $c_v(t_n)$ nach p mit $\langle \dot{c}_{t_n}(0), \dot{c}_v(t_n) \rangle \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ wählen. Eine Teilfolge dieser Geodäten konvergiert dann gegen eine Geodäte wie gesucht (man wähle eine konvergente Teilfolge der Anfangsgeschwindigkeiten).

Wir gehen nun also von (*) aus und leiten einen Widerspruch her. Dazu zeigen wir, dass die Funktion $t \mapsto d(p, c_v(t))$ auf $(0, T)$ streng monoton steigt. Dies stellt dann einen Widerspruch zur Maximalität von $d(p, q) = d(p, c_v(0))$ dar. Genauer zeigen wir:

(**): $\forall t \in (0, T) : \exists \varepsilon > 0 : \forall s \in (t - \varepsilon, t) : d(p, c_v(s)) < d(p, c_v(t))$

Hieraus folgt strikte Monotonie, denn mit (**) kann man leicht zeigen, dass für

$$t^* := \inf\{t \in [0, T) : d(p, c_v(\cdot)) \text{ ist auf } [t, T) \text{ streng monoton steigend}\}$$

schon $t^* = 0$ gilt.

Zum Nachweis von (**) sei $t \in (0, T)$. Wähle eine minimierende Einheitsgeodäte c_t von $c_v(t)$ nach p . Wähle einen beliebigen Punkt z , der auf c_t zwischen $c_v(t)$ und p liegt. Dann gilt $c_v(t) \notin \text{Cut}(z)$, da c_t minimiert. Somit ist $r := d(z, \cdot)$ glatt nahe $c_v(t)$ und es gilt

$$\frac{d}{ds} d(z, c_v(s)) = \langle \text{grad } r|_{c_v(s)}, \dot{c}_v(s) \rangle,$$

insbesondere folgt hieraus mit $\text{grad } r|_{c_v(t)} = -\dot{c}_t(0)$, dass

$$\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=t} d(z, c_v(s)) = -\langle \dot{c}_t(0), \dot{c}_v(t) \rangle \stackrel{(*)}{<} 0$$

gilt. Dies gilt dann auch nahe t und somit ist $s \mapsto d(z, c_v(s))$ streng monoton steigend nahe t . Mit der Dreiecksungleichung folgt nun für s nahe t mit $s < t$:

$$d(p, c_v(s)) \leq d(p, z) + d(z, c_v(s)) < d(p, z) + d(z, c_v(t)) = d(p, c_v(t)).$$

Dies zeigt (**). □

Im nächsten Lemma nutzen wir den Satz von Toponogov um zu zeigen, dass (unter gewissen Voraussetzungen) ein Punkt nicht zugleich von zwei Punkten „sehr weit“ entfernt sein kann.

Lemma 4.18. *Sei M vollständig. Für die Schnittkrümmung gelte $K \geq \kappa > 0$. Weiter gelte $\text{diam}(M) > \pi/(2\sqrt{\kappa})$.⁶ Seien $p, q \in M$ mit $d(p, q) = \text{diam}(M)$. Dann gilt $M = B(p, r) \cup B(q, r)$ für alle $r > \pi/(2\sqrt{\kappa})$.*

Beweis. Beachte zunächst, dass nach Bonnet-Myers $\text{diam}(M) \leq \pi/\sqrt{\kappa}$ gilt und dass sn_κ auf $[0, \pi/\sqrt{\kappa}]$ nichtnegativ und cs_κ auf $[0, \pi/\sqrt{\kappa}]$ monoton fallend ist.

Seien nun $p, q \in M$ mit $d(p, q) = \text{diam}(M)$ und sei $r > \pi/(2\sqrt{\kappa})$. Sei weiter $x \in M$. Angenommen $x \notin B(q, r)$, d.h. $d(q, x) \geq r$. Wir zeigen $x \in B(p, r)$, d.h. $d(p, x) < r$.

Wähle eine minimierende Einheitsgeodäte c_1 von q nach x . Wegen $d(p, q) = \text{diam}(M)$ existiert nach dem vorherigen Lemma eine minimierende Einheitsgeodäte c_2 von q nach p mit $\langle \dot{c}_1(0), \dot{c}_2(0) \rangle \geq 0$.

Konstruieren in M_κ^n ein Vergleichsgelenk $\tilde{p}, \tilde{q}, \tilde{x}, \tilde{c}_1, \tilde{c}_2$, d.h. mit $d(\tilde{p}, \tilde{q}) = d(p, q)$ und $d(\tilde{q}, \tilde{x}) = d(q, x)$ und $\langle \dot{\tilde{c}}_1(0), \dot{\tilde{c}}_2(0) \rangle = \langle \dot{c}_1(0), \dot{c}_2(0) \rangle$. Nach dem Satz von Toponogov (in der Gelenk-Version) gilt dann $d(p, x) \leq d(\tilde{p}, \tilde{x})$.

Da cs_κ auf $[0, \pi/\sqrt{\kappa}]$ monoton fällt und alle Abstände höchstens $\pi/\sqrt{\kappa}$ betragen folgt mit dem Kosinus-Satz 4.13 in M_κ^n :

$$\begin{aligned} \text{cs}_\kappa d(p, x) &\geq \text{cs}_\kappa d(\tilde{p}, \tilde{x}) = \text{cs}_\kappa d(\tilde{x}, \tilde{q}) \text{cs}_\kappa d(\tilde{p}, \tilde{q}) + \kappa \text{sn}_\kappa d(\tilde{x}, \tilde{q}) \text{sn}_\kappa d(\tilde{q}, \tilde{p}) \langle \dot{\tilde{c}}_1(0), \dot{\tilde{c}}_2(0) \rangle \\ &= \text{cs}_\kappa d(x, q) \text{cs}_\kappa d(p, q) + \underbrace{\kappa \text{sn}_\kappa d(x, q) \text{sn}_\kappa d(p, q)}_{\geq 0} \underbrace{\langle \dot{c}_1(0), \dot{c}_2(0) \rangle}_{\geq 0} \\ &\geq \text{cs}_\kappa d(x, q) \text{cs}_\kappa d(p, q). \end{aligned}$$

Beachte im letzten Schritt, dass sn_κ auf $[0, \pi/\sqrt{\kappa}]$ nichtnegativ ist.

Wegen $d(p, q) = \text{diam}(M) > \pi/(2\sqrt{\kappa})$ und $d(x, q) \geq r > \pi/(2\sqrt{\kappa})$ sind beide Faktoren auf der rechten Seite negativ. Also gilt $\text{cs}_\kappa d(p, x) > 0$, woraus wegen $d(p, x) \leq \pi/\sqrt{\kappa}$ die gewünschte Abschätzung $d(p, x) < \pi/(2\sqrt{\kappa}) < r$ folgt. \square

Als letzte Vorbereitung für den Beweis von Proposition 4.16 zeigen wir, dass jede von p ausgehende Geodäte den „Äquator“ trifft. Hier geht die untere Schranke für den Injektivitätsradius und damit die obere Krümmungsschranke für M sowie die Voraussetzung, dass M einfach zusammenhängend ist, ein.

Lemma 4.19. *Sei M einfach zusammenhängend und vollständig. Für die Schnittkrümmung gelte $1/4 < \kappa \leq K \leq 1$. Seien $p, q \in M$ mit $d(p, q) = \text{diam}(M)$. Sei weiter $\pi/(2\sqrt{\kappa}) < r < \pi$. Dann gibt es für jede Einheitsgeodäte c mit $c(0) = p$ ein eindeutiges $t_0 \in (0, r)$ mit $d(p, c(t_0)) = d(q, c(t_0))$.*

Beweis. Betrachte die stetige Funktion $g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$g(t) := d(q, c(t)) - d(p, c(t)).$$

Wir wollen zeigen, dass g auf $(0, r)$ genau eine Nullstelle hat. Für die Existenz nutzen wir den Zwischenwertsatz. Es gilt $g(0) = d(q, p) = \text{diam}(M) > 0$.

⁶Unter der Voraussetzung $1/4 < \kappa \leq K \leq 1$ wie im Sphärensatz gilt dies aufgrund der unteren Schranke für den Injektivitätsradius (Theorem 4.15).

4. Vergleichsgeometrie

Zeige $g(r) < 0$: Nach Theorem 4.15 gilt $\text{inj}(M) \geq \pi > r$. Also ist c auf $[0, r]$ minimierend, d.h. es gilt $d(p, c(t)) = t$ für alle $t \in [0, r]$. Es folgt $d(p, c(r)) = r > \pi/(2\sqrt{\kappa})$. Nach Lemma 4.18 gilt somit $d(q, c(r)) < r$. Also gilt $g(r) = d(q, c(r)) - d(p, c(r)) < r - r = 0$.

Nach dem Zwischenwertsatz hat g somit eine Nullstelle $t_0 \in (0, r)$.

Zum Nachweis der Eindeutigkeit seien $t_0, t_1 \in (0, r)$ mit $d(p, c(t_0)) = d(q, c(t_0))$ und $d(p, c(t_1)) = d(q, c(t_1))$. Zwecks Widerspruch nehmen wir an, dass $t_0 \neq t_1$ gilt. Ohne Einschränkung gelte $t_0 < t_1$, d.h. $c(t_0)$ kommt vor $c(t_1)$ auf c . Sei \tilde{c} eine minimierende Einheitsgeodäte von q nach $c(t_0)$. Da c auf $[0, r]$ minimiert, gilt dann zunächst gilt

$$\ell(\tilde{c}) = d(q, c(t_0)) = d(p, c(t_0)) = \ell(c|_{[0, t_0]})$$

und damit weiter auch

$$d(q, c(t_1)) = d(p, c(t_1)) = \ell(c|_{[0, t_1]}) = \ell(c|_{[0, t_0]}) + \ell(c|_{[t_0, t_1]}) = \ell(c|_{[0, t_0]}) + \ell(\tilde{c}).$$

Also ist die Zusammensetzung von \tilde{c} und $c|_{[t_0, t_1]}$ eine minimierende Kurve von q nach $c(t_1)$ und somit eine Geodäte. Daraus folgt leicht, dass c_1 in c enthalten ist und $q = p$ gilt. Letzteres ist ein Widerspruch zu $d(p, q) = \text{diam}(M) \geq \pi$. \square

Bemerkung 4.20. Die Einschränkung, dass der Punkt auf c im Bereich $[0, r] \subset [0, \pi]$ liegt, ist für die Eindeutigkeit essenziell, wie man zum Beispiel auf der Sphäre sieht.

Nun haben wir genügend Hilfsaussagen gesammelt, um Proposition 4.16 zu beweisen.

Beweis von Proposition 4.16. Wähle $r \in (\pi/(2\sqrt{\kappa}), \pi)$.

Zu (i): Als Niveaumenge einer stetigen Funktion ist $N \subset M$ abgeschlossen. Da M kompakt ist, ist somit auch N kompakt.

Nach Lemma 4.18 gilt $N \subset B(p, r) \cap B(q, r)$, da kein Punkt sowohl von p als auch von q Abstand größergleich r haben kann und alle Punkte auf N gleichen Abstand zu p und q haben. Nach Theorem 4.15 gilt weiter $\text{inj}(M) \geq \pi > r$, also sind die Bälle $B(p, r)$ und $B(q, r)$ geodätisch. Zudem gelten $q \notin B(p, r)$ und $p \notin B(q, r)$, denn $d(p, q) = \text{diam}(M) \geq \pi > r$. Damit ist die Funktion

$$f : M \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := d(q, x) - d(p, x)$$

auf $B(p, r) \cap B(q, r)$ glatt. Wir zeigen, dass $\text{grad } f$ in keinem Punkt von N Null ist. Daraus folgt, dass $N \subset M$ als *reguläre* Niveaumenge eine glatte, eingebettete Hyperfläche ist.

Sei dazu $x \in N$ und seien $c_1 : [0, L] \rightarrow M$ und $c_2 : [0, L] \rightarrow M$ die (eindeutigen) minimierenden Einheitsgeodäten von p bzw. q nach x . Da $\dot{c}_1(L)$ und $\dot{c}_2(L)$ gleich den Gradienten der Abstandsfunktionen zu p bzw. q in x sind, gilt:

$$\begin{aligned} \langle \text{grad } f|_x, \dot{c}_1(L) \rangle &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=L} f(c_1(t)) = \langle \dot{c}_2(L), \dot{c}_1(L) \rangle - \langle \dot{c}_1(L), \dot{c}_1(L) \rangle \\ &= \langle \dot{c}_2(L), \dot{c}_1(L) \rangle - 1 \\ &\stackrel{\text{CSU}}{\leq} 0. \end{aligned}$$

Angenommen hier gilt Gleichheit. Dann folgt $\dot{c}_2(L) = \dot{c}_1(L)$ und somit $c_1 = c_2$. Hieraus folgt weiter $p = q$, was ein Widerspruch zu $d(p, q) = \text{diam}(M) \geq \pi$ ist. Also gilt $\langle \text{grad } f|_x, \dot{c}_1(L) \rangle < 0$ und somit ist f in x regulär.⁷

Zu (ii): Der erste Teil folgt schlicht aus (i) und der Tatsache, dass \exp_p und \exp_q wegen $\overline{\text{inj}(M)} \geq p$ auf Bällen mit Radius π Diffeomorphismen (auf ihre Bilder) sind.

Wegen $0 \notin N_p$ ist s_p wohldefiniert und glatt und wegen $N \subset B(p, r)$ ist s_p nach Lemma 4.19 bijektiv. Da N_p kompakt und $S_p M$ Hausdorff ist, ist s_p abgeschlossen und damit die Umkehrabbildung s_p^{-1} stetig. Also ist s_p ein Homöomorphismus, womit auch direkt folgt, dass t_p stetig ist. Das Argument für s_q und t_q ist analog.

Zu (iii): Ein konkreter Homöomorphismus auf einen Ball ist, wie man leicht prüft (beachte, dass t_p ein positives Minimum hat), gegeben durch

$$D_T^+ \rightarrow \overline{B(0, 1)}, \quad v \mapsto \begin{cases} \frac{1}{t_p(v/|v|)} \cdot v & v \neq 0, \\ 0 & v = 0 \end{cases}.$$

Wegen $D_T^+ \subset B(0, r) \subset B(0, \pi)$ und $\text{inj}(M) \geq \pi$ ist \exp_p auf D_T^+ ein Homöomorphismus auf sein Bild, welches nach Konstruktion gerade D^+ ist. Für D_T^- argumentiert man wiederum analog. \square

⁷Ein ähnliches Argument zeigt, dass f auf ganz $B(p, r) \cap B(q, r)$ regulär ist.

A. Wiederholungen aus der Differentialgeometrie und Notationen

A.1. Differentialrechnung auf Mannigfaltigkeiten

Zum Nachlesen werden das Skript [8] von Oliver Schnürer zur Differentialgeometrie II und das sehr ausführliche Buch [4] von John Lee empfohlen.

Auf der folgenden Seite ist eine kurze Übersicht über Tangentialvektoren, Koordinatenvektorfelder und Ableitungen glatter Funktionen zu finden.

Definition von $v \in T_p M$	Vektorraumstruktur auf $T_p M$	Koordinatenvektorfelder $\frac{\partial}{\partial x^i}$ (Karte $x = (x^1, \dots, x^n) : U \subset M \rightarrow \mathbb{R}^n$)	Ableitung $DF : TM \rightarrow TN$ (für $F : M \rightarrow N$ glatt)
Als Äquivalenzklassen glatter Kurven durch p : $v = [\gamma]$ mit $\gamma \sim \eta$, falls $(f \circ \gamma)'(0) = (f \circ \eta)'(0)$ für alle $f \in C^\infty(M)$	Man zieht die Vektorraumstruktur des \mathbb{R}^n mittels der Abbildung $[\gamma] \mapsto (x \circ \gamma)'(0) \in \mathbb{R}^n$ für eine Karte (U, x) um p zurück.	$\frac{\partial}{\partial x^i} \Big _p := [x^{-1}(x(p) + te_i)]$	$DF(\underbrace{[\gamma]}_{\in T_p M}) := \underbrace{[F \circ \gamma]}_{\in T_{F(p)} N}$
Als Derivation von $C^\infty(M)$ in p : $v : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$ \mathbb{R} -linear mit Leibnizregel $v(fg) = v(f)g(p) + f(p)v(g)$	Punktweise als Abb. nach \mathbb{R} . (Linearität und Leibnizregel bleiben erhalten.)	$\frac{\partial}{\partial x^i} \Big _p (f) := \frac{\partial(f \circ x^{-1})}{\partial x^i}(x(p))$ Wobei auf der rechten Seite die „normale“ partielle Ableitung von $f \circ x^{-1} : V \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ gemeint ist.	$DF(v)(g) := v(g \circ F)$ für $g \in C^\infty(N)$

Andere Notationen und Bezeichnungen bzw. nützliche Zusammenhänge (die in beiden Zugängen gültig sind):

- Anstelle von DF sind auch gängig: F_* (Pushforward), dF , TF (Tangentialabbildung)
- Für skalare glatte Funktionen $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ schreibt man üblicherweise df oder df für Df .
- $DF(v) = (F \circ \gamma)'(0)$ für jede glatte Kurve $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ mit $\gamma'(0) = v$, wobei $\gamma'(t) := D\gamma(\frac{\partial}{\partial t})$.
- Für $F : M \rightarrow N$ glatt und Koordinaten (U, x) auf M und (V, y) auf N mit $F(U) \subset V$ ist die Matrixdarstellung der linearen Abbildung DF bezüglich der Basen $\{\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p\}$ und $\{\frac{\partial}{\partial y^i} \Big|_{F(p)}\}$ gerade die („normale“) Jacobimatrix der Abbildung $y \circ F \circ x^{-1} : x(U) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ im Punkt $x(p)$ (also der *Koordinatendarstellung von F*).
- Die zu $\{\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p\}$ duale Basis ist durch $\{dx^i|_{T_p M} : T_p M \rightarrow \mathbb{R}\}$ gegeben (Ableitungen der Koordinatenfunktionen).
Für $v \in T_p M$ gilt also

$$v = dx^i(v) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \quad \text{und} \quad dx^i(v) = \underbrace{\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} x^i(\gamma(t))}_{\substack{\text{„normale“ Ableitung von} \\ x^i \circ \gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}}} \quad \text{für eine beliebige glatte Kurve } \gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M \text{ mit } \gamma'(0) = v.$$

A.2. Vektorbündel, Zusammenhänge, Krümmung

A.2.1. Was war nochmal ein Vektorbündel?

Vergleiche Kapitel 19 in [8].

Ein (reelles) *Vektorbündel von Rang* $k \in \mathbb{N}$ über einer glatten Mannigfaltigkeit M ist eine glatte Mannigfaltigkeit E und eine glatte Abbildung $p : E \rightarrow M$, für welches eine offene Überdeckung $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ von M und Diffeomorphismen $\phi_\alpha : p^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^k$ für alle $\alpha \in \Lambda$ mit folgenden Eigenschaften existieren:

- Es gilt $\text{pr}_1 \circ \phi_\alpha = p$ für alle $\alpha \in \Lambda$.
- Für alle $\alpha, \beta \in \Lambda$ mit $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ hat die Abbildung $\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}$ die Form

$$(\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1})(x, v) = (x, \tau_{\alpha\beta}(x)v). \quad (\text{A.1})$$

für eine glatte Abbildung $\tau_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow \text{GL}_k(\mathbb{R})$.

Man nennt die Abbildungen ϕ_α *lokale Trivialisierungen* und die Abbildungen (A.1) bzw. $\tau_{\alpha\beta}$ *Übergangsfunktionen*. Weiter nennt man $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$ einen *Vektorbündelatlas*.

Für $U \subset M$ und $x \in M$ schreibt man $E|_U := p^{-1}(U)$ und $E_x := p^{-1}(E_x)$. Letzteres wird *Faser über* x genannt und erbt vermöge einer (beliebigen) lokalen Trivialisierung um x die Vektorraumstruktur des \mathbb{R}^k . Aufgrund von (A.1) kommt es dabei nicht auf die Wahl der lokalen Trivialisierung an. Nach Konstruktion ist damit jede Einschränkung $\phi_\alpha|_{E_x}$ ein Vektorraumisomorphismus zwischen E_x und $\{x\} \times \mathbb{R}^k \cong \mathbb{R}^k$.

Bemerkung A.1. Man kann überall die Begriffe „glatte Mannigfaltigkeit“ und „glatte Abbildung“ durch „topologischer Raum“ und „stetige Abbildung“ ersetzen. Dann erhält man den Begriff des Vektorbündels in der Kategorie der topologischen Räume.

Die topologische und differenzierbare Struktur eines Vektorbündels über M ist eindeutig durch die von M und durch die Übergangsfunktionen (A.1) festgelegt. Deshalb kann man ein Bündel auch aus diesen rekonstruieren bzw. durch diese definieren. Das ist häufig hilfreich bei allgemeinen Konstruktionen von Vektorbündeln.

Proposition A.2 (Vektorbündel aus lokalen Trivialisierungen). *Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $\{E_x\}_{x \in M}$ eine durch M parametrisierte Familie reeller Vektorräume derselben Dimension $k \in \mathbb{N}$. Setze $E := \bigcup_{x \in M} \{x\} \times E_x$ und definiere $p : E \rightarrow M$ durch $p(x, v) := x$. Weiter seien eine offene Überdeckung $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ von M sowie für jedes $\alpha \in \Lambda$ eine Bijektion $\phi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^k$ mit folgenden Eigenschaften gegeben:*

- für jedes $\alpha \in \Lambda$ und $x \in U_\alpha$ ist $(\text{pr}_2 \circ \phi_\alpha)|_{\{x\} \times E_x}$ ein Vektorraumisomorphismus,
- für alle $\alpha, \beta \in \Lambda$ mit $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ hat die Abbildung $\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}$ die Form

$$(\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1})(x, v) = (x, \tau_{\alpha\beta}(x)v). \quad (\text{A.2})$$

für eine glatte Abbildung $\tau_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow \text{GL}_k(\mathbb{R})$.

A. Wiederholungen aus der Differentialgeometrie und Notationen

Dann gibt es auf E genau eine Topologie und glatte Struktur als $\dim(M)+k$ dimensionale Mannigfaltigkeit, sodass $p : E \rightarrow M$ ein glattes Vektorbündel ist und $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$ ein Vektorbündelatlas.

Beweis. Lemma 10.6 in [4]. □

A.2.2. Was war nochmal ein Zusammenhang?

Vergleiche Kapitel 21 in [8]. Dort nur für $E = TM$.

Ist $E \rightarrow M$ ein Vektorbündel, so ist ein Zusammenhang ∇ für dieses eine Abbildung $\nabla : \Gamma^\infty(TM) \times \Gamma^\infty(E) \rightarrow \Gamma^\infty(E)$, die für alle $f \in C^\infty(M)$, $X \in \Gamma^\infty(TM)$, $\psi, \phi \in \Gamma^\infty(E)$ folgende Regeln erfüllt:

- (i) $\nabla_{fX}\psi = f\nabla_X\psi$,
- (ii) $\nabla_X(f\psi + \phi) = (Xf)\psi + f\nabla_X\psi + \nabla_X\phi$.

Die erste Regel besagt, dass $\nabla_X s$ nur „tensoriell“ von X abhängt, d.h. $(\nabla_X s)(x)$ hängt nur vom Wert $X(x)$ ab.¹ Dies entspricht einfach der Idee, dass X ja die Richtung angibt, in welche abgeleitet wird. Die zweite Regel ist einfach die *Leibniz-Regel*, die besagt, dass ∇ den Schnitt s auch „wirklich ableitet“.

Lokale Beschreibung eines Zusammenhangs Sind $s_1, \dots, s_k \in \Gamma^\infty(E|_U)$ lokale Basischnitte, so gilt für jeden Schnitt $\psi \in \Gamma^\infty(E|_U)$ mit $\psi = \psi^\alpha s_\alpha$ und alle $X \in \Gamma^\infty(TU)$:

$$\nabla_X \psi = (X\psi^\alpha)s_\alpha + \psi^\alpha \nabla_X s_\alpha.$$

Aus der Kenntnis der (E -wertigen) Einsformen $\omega_\alpha := \nabla s_\alpha \in \Gamma^\infty(T^*U \otimes E|_U)$ lässt sich also schon der gesamte Zusammenhang rekonstruieren. Man kann die E -wertigen Einsformen wieder bezüglich des Rahmens $\{s_\alpha\}_\alpha$ entwickeln und (skalare) Einsformen $\omega_\alpha^\beta \in \Gamma^\infty(T^*U)$ definieren durch

$$\nabla_X s_\alpha =: \omega_\alpha^\beta(X)s_\beta. \tag{A.3}$$

Es gilt dann $\omega_\alpha = \omega_\alpha^\beta \otimes s_\beta$. Man nennt sowohl die $\omega_\alpha \in \Gamma^\infty(T^*U \otimes E|_U)$ als auch die $\omega_\alpha^\beta \in \Gamma^\infty(T^*U)$ *lokale Zusammenhangseinsformen* von ∇ bezüglich $\{s_\alpha\}$.

Wählt man zusätzlich einen lokalen Rahmen $\{E_i\}$ für TU , so kann man die lokalen Zusammenhangseinsformen weiter aufdröseln und damit den Zusammenhang so weit wie möglich zerlegen:

$$\omega_\alpha(X^i E_i) = X^i \omega_\alpha(E_i) = X^i \omega_\alpha^\beta(E_i)s_\beta =: X^i \Gamma_{i\alpha}^\beta s_\beta.$$

Man nennt dann die $\Gamma_{i\alpha}^\beta \in C^\infty(U)$ die *Christoffelsymbole* von ∇ bezüglich der Rahmen $\{s_\alpha\}$ und $\{E_i\}$. Sie sind implizit durch die Gleichung

$$\nabla_{E_i} s_\alpha =: \Gamma_{i\alpha}^\beta s_\beta \tag{A.4}$$

¹Aus diesem Grund kann man ∇ auch als Abbildung $\nabla : \Gamma^\infty(E) \rightarrow \Gamma^\infty(T^*M \otimes E)$, $s \mapsto \nabla s$ auffassen.

A.2. Vektorbündel, Zusammenhänge, Krümmung

definiert. Für den gesamten Zusammenhang gilt dann mit $X = X^i E_i$ und $\psi = \psi^\alpha s_\alpha$

$$\nabla_X \psi = \left(d\psi^\beta(X) + \Gamma_{i\alpha}^\beta X^i \psi^\alpha \right) s_\beta \stackrel{(E_i = \partial_i)}{=} \left(X^i \partial_i \psi^\beta + \Gamma_{i\alpha}^\beta X^i \psi^\alpha \right) s_\beta.$$

Da man häufig die Koeffizienten eines abgeleiteten Schnitts weiterverwenden möchte, ist folgende „Strichpunkt-Notation“ oft nützlich:

$$\psi^\alpha_{;i} := d\psi^\alpha(E_i) + \Gamma_{i\beta}^\alpha \psi^\beta \stackrel{(E_i = \partial_i)}{=} \partial_i \psi^\alpha + \Gamma_{i\beta}^\alpha \psi^\beta. \quad (\text{A.5})$$

Man beachte:

- Der Tangentialrahmen $\{E_i\}$ kann als Koordinatenrahmen gewählt werden (d.h. mit $E_i = \partial_i$), muss aber natürlich nicht.
- Für den Fall $E = TM$ können die beiden Rahmen von E und von TM gleich gewählt werden und in der Regel würde man das auch so tun.
- In den Christoffelsymbolen $\Gamma_{i\alpha}^\beta$ hat der römische Index eine etwas andere Rolle als die griechischen. Diese Unterscheidung kann auch für $E = TM$ noch nützlich sein.

Neue kovariante Ableitungen aus alten Aus einer gegebenen kovarianten Ableitung ∇ auf einem Vektorbündel $E \rightarrow M$ lassen sich in natürlicher Weise weitere kovariante Ableitungen auf vielen „aus E gebauten“ Vektorbündeln konstruieren, indem man eine Leibnizregel erzwingt. Zum Beispiel:

$$\text{Auf } E^* : \quad (\nabla_X \omega)(s) := X(\omega(s)) - \omega(\nabla_X s), \quad (\text{A.6})$$

$$\text{Auf } E \otimes E : \quad \nabla_X (s \otimes t) := (\nabla_X s) \otimes t + s \otimes (\nabla_X t). \quad (\text{A.7})$$

Aus den kovarianten Ableitungen auf E und E^* lassen sich nach demselben Schema wie in (A.7) kovariante Ableitungen auf beliebigen Tensorpotenzen von E und E^* definieren. Zum Beispiel erhält man so auch eine kovariante Ableitung für $\text{End}(E)$, wenn man dieses als $E^* \otimes E$ auffasst. Die Leibnizregel für das Tensorprodukt übersetzt sich dann in die Leibnizregel $\nabla_X(\phi(s)) = (\nabla_X \phi)(s) - \phi(\nabla_X s)$ für $\phi \in \Gamma^\infty(\text{End}(E))$ und $s \in \Gamma^\infty(E)$.

Metrische Zusammenhänge Ist auf E zusätzlich ein faserweises Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ gegeben, so nennt man einen Zusammenhang ∇ auf E *metrisch* bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle$, falls für beliebige $X \in \Gamma^\infty(TM)$ und $\psi, \phi \in \Gamma^\infty(E)$ die Identität

$$X \langle \psi, \phi \rangle = \langle \nabla_X \psi, \phi \rangle + \langle \psi, \nabla_X \phi \rangle \quad (\text{A.8})$$

gilt. In diesem Fall wird also das Skalarprodukt selbst nicht explizit abgeleitet bzw. ist dessen Ableitung 0. Schreibt man g für den metrischen Tensor und fasst diesen als Schnitt von $E^* \otimes E^*$ auf, so ist (A.8) gleichbedeutend zu $\nabla g = 0$, wobei hier die kovariante Ableitung auf $E^* \otimes E^*$ nach im vorherigen Abschnitt erklärten Prinzip definiert ist.

A. Wiederholungen aus der Differentialgeometrie und Notationen

Lemma A.3 (Metrische Zusammenhänge). *Ist ∇ ein Zusammenhang auf E und h eine Fasermetric, so sind äquivalent:*

(i) ∇ ist metrisch bezüglich h .

(ii) Die metrischen Koeffizienten und Zusammenhangs-1-Formen bezüglich beliebiger lokaler Rahmen erfüllen die Identität

$$dh_{\alpha\beta} = h_{\beta\gamma}\omega_{\alpha}^{\gamma} + g_{\alpha\gamma}\omega_{\beta}^{\gamma} \quad (\text{A.9})$$

(iii) Die Zusammenhangs-1-Formen bezüglich beliebiger h -Orthonormalrahmen erfüllen die Identität

$$\omega_{\alpha}^{\beta} = -\omega_{\beta}^{\alpha}. \quad (\text{A.10})$$

Spezialfall $E = TM$: Torsion und symmetrische Zusammenhänge Ist ∇ ein Zusammenhang auf TM , so lässt sich der *Torsionstensor* $T^{\nabla} \in \Omega^2(M)$ definieren:

$$T^{\nabla}(X, Y) := \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]. \quad (\text{A.11})$$

Das Abziehen des Kommutators sorgt dafür, dass T^{∇} ein Tensor ist (d.h. C^{∞} -linear). Man nennt ∇ *torsionsfrei* oder *symmetrisch*, falls $T^{\nabla} = 0$ gilt.

Lemma A.4 (Torsionsfreie Zusammenhänge und Christoffelsymbole). *Ein Zusammenhang ∇ auf TM ist genau dann torsionsfrei, wenn die Christoffelsymbole eines beliebigen lokalen Rahmens $\{E_i\}$ von M die Identität*

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k - \varepsilon^k([E_i, E_j]) \quad (\text{A.12})$$

erfüllen, wobei $\{\varepsilon^i\}$ der duale (Ko)Rahmen ist. Besteht der Rahmen aus Koordinatenvektorfeldern, so sind die Christoffelsymbole also symmetrisch in den unteren Indizes.

Warnung: Stellt man einen torsionsfreien Zusammenhang (z.B. einen Levi-Civita-Zusammenhang) in einem lokalen Rahmen dar, der *nicht aus Koordinatenvektorfeldern* besteht, so sind die Christoffelsymbole nach (A.12) auch *nicht* notwendigerweise symmetrisch in den unteren Indizes!

Spezialfall Levi-Civita-Zusammenhang einer (semi-)Riemannschen Mannigfaltigkeit

Auf einer semi-Riemannschen Mannigfaltigkeit gibt es einen ausgezeichneten Zusammenhang für das Tangentialbündel, den man *Levi-Civita-Zusammenhang* nennt.

Satz A.5 (Levi-Civita-Zusammenhang). *Sei (M, g) eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit. Es gibt genau einen torsionsfreien und bezüglich g metrischen Zusammenhang ∇ auf TM . Dieser ist eindeutig durch folgende „Koszul-Formel“ festgelegt:*

$$2\langle \nabla_X Y, Z \rangle = X\langle Y, Z \rangle + Y\langle X, Z \rangle - Z\langle X, Y \rangle + g([X, Y], Z) - g([Y, Z], X) + g([Z, X], Y) \quad (\text{A.13})$$

für alle $X, Y, Z \in \Gamma^{\infty}(TM)$.

Die Koszul-Formel (A.13) lässt sich auch in Koordinaten übersetzen.

Lemma A.6. *Die Christoffelsymbole des Levi-Civita-Zusammenhangs bezüglich Koordinatenvektorfelder sind gegeben durch*

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}g^{k\ell}(\partial_i g_{j\ell} + \partial_j g_{i\ell} - \partial_\ell g_{ij}), \quad (\text{A.14})$$

wobei $g_{ij} = g(\partial_i, \partial_j)$ die metrischen Koeffizienten in den gegebenen Koordinaten sind.

A.2.3. Die Krümmung eines Zusammenhangs

Allgemein Definition des Krümmungstensors Zu einem Zusammenhang ∇ auf einem Vektorbündel $E \rightarrow M$ ist der *Krümmungstensor* $R^\nabla \in \Gamma^\infty(\Lambda^2 T^*M \otimes \text{End}(E))$ definiert durch

$$R^\nabla(X, Y) := [\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X, Y]} \quad (X, Y \in \Gamma^\infty(TM)) \quad (\text{A.15})$$

bzw. expliziter $R^\nabla(X, Y)\psi = \nabla_X(\nabla_Y\psi) - \nabla_Y(\nabla_X\psi) - \nabla_{[X, Y]}\psi$. Die Antisymmetrie in X und Y ist sofort klar. Dass R^∇ wirklich in allen Einträgen ein Tensor ist, rechnet man leicht nach ($C^\infty(M)$ -Linearität prüfen).

Ist der Zusammenhang ∇ zusätzlich *metrisch* bezüglich einer Fasermetric $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf E , so nimmt der Krümmungstensor Werte in den bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *schiefsymmetrischen* Endomorphismen von E an, d.h. für alle $X, Y \in \Gamma^\infty(TM)$ und $\psi, \phi \in \Gamma^\infty(E)$ gilt

$$\langle R(X, Y)\psi, \phi \rangle = -\langle \psi, R(X, Y)\phi \rangle \quad (\text{falls } \nabla \text{ metrisch}). \quad (\text{A.16})$$

Lokale Darstellung des Krümmungstensors Bezüglich eines lokalen Rahmens $\{s_\alpha\}$ von E über $U \subset M$ lässt sich der Krümmungstensor zerlegen als

$$R(X, Y)s_\alpha =: \Omega_\alpha^\beta(X, Y)s_\beta \quad (\text{A.17})$$

mit den sogenannten lokalen *Krümmungs-Zwei-Formen* $\Omega_\alpha^\beta \in \Omega^2(M)$.

Wählt man weiter einen lokalen Rahmen $\{E_i\}$ von TM , so lassen sich auch die Krümmungs-Zwei-Formen weiter zerlegen, indem man

$$R_{ij}{}^\beta{}_\alpha := \Omega_\alpha^\beta(E_i, E_j) \in C^\infty(U) \quad (\text{A.18})$$

setzt. Es gilt dann insgesamt für $X = X^i E_i$, $Y = Y^j E_j$ und $\psi = \psi^\alpha s_\alpha$

$$R(X, Y)\psi = R_{ij}{}^\beta{}_\alpha X^i Y^j \psi^\alpha \cdot s_\beta \quad (\text{A.19})$$

Man kann die Komponenten von R durch die Komponenten von ∇ ausdrücken, indem man einfach die Definition des Krümmungstensor einsetzt und sorgfältig unter Beachtung der Leibnizregel expandiert.

A. Wiederholungen aus der Differentialgeometrie und Notationen

Lemma A.7. Sei ∇ ein Zusammenhang auf $E \rightarrow M$ und seien $\{s_\alpha\}$ und $\{E_i\}$ lokale Rahmen von E bzw. TM über $U \subset M$. Die Komponenten des Krümmungstensors lassen sich wie folgt durch die des Zusammenhangs ausdrücken (mit $[E_i, E_j] =: C_{ij}^k E_k$):²

$$\Omega_\alpha^\beta = d\omega_\alpha^\beta - \omega_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^\beta, \quad (\text{A.20})$$

$$R_{ij}^\beta{}_\alpha = (d\Gamma_{j\alpha}^\beta)(E_i) - (d\Gamma_{i\alpha}^\beta)(E_j) + \Gamma_{j\alpha}^\gamma \Gamma_{i\gamma}^\beta - \Gamma_{i\alpha}^\gamma \Gamma_{j\gamma}^\beta - C_{ij}^k \Gamma_{k\alpha}^\beta, \quad (\text{A.21})$$

$$R_{ij}^\beta{}_\alpha = \partial_i \Gamma_{j\alpha}^\beta - \partial_j \Gamma_{i\alpha}^\beta + \Gamma_{j\alpha}^\gamma \Gamma_{i\gamma}^\beta - \Gamma_{i\alpha}^\gamma \Gamma_{j\gamma}^\beta \quad (\text{nur für } E_i = \partial_i). \quad (\text{A.22})$$

Ist ∇ zusätzlich metrisch bezüglich eines faserweisen Skalarprodukts h auf E , so setzt man auch wie üblich

$$R_{ij\alpha\beta} := h_{\alpha\gamma} R_{ij}^\gamma{}_\beta. \quad (\text{A.23})$$

Für $X = X^i E_i$, $Y = Y^j E_j$, $\psi = \psi^\alpha s_\alpha$ und $\phi = \phi^\beta s_\beta$ gilt dann

$$\langle R(X, Y)\psi, \phi \rangle = R_{ij\alpha\beta} X^i Y^j \psi^\alpha \phi^\beta. \quad (\text{A.24})$$

Ist $E = TM$, so ist es natürlich wieder üblich, nur einen Rahmen zu verwenden.

Symmetrien des Krümmungstensors Im Allgemeinen erfüllt der Krümmungstensor nur die offensichtliche Antisymmetrie in den ersten beiden Argumenten. Unter zusätzlichen Annahmen gelten jedoch weitere Symmetrien, wie in Tabelle A.1 zusammengefasst. Die Krümmung des Levi-Civita-Zusammenhangs erfüllt alle diese.

$R(X, Y)Z = -R(Y, X)Z$	$R_{ij}{}^\ell{}_k = -R_{ji}{}^\ell{}_k$	Antisymmetrie
Falls ∇ metrisch bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle$:		
$\langle R(X, Y)Z, W \rangle = -\langle Z, R(X, Y)W \rangle$	$R_{ijkl} = -R_{ijlk}$	Schiefadjungiertheit
Falls ∇ torsionsfreier Zusammenhang auf TM		
$R(X, Y)Z + \text{zyklisch}(X, Y, Z) = 0$	$R_{ij}{}^\ell{}_k + R_{jk}{}^\ell{}_i + R_{ki}{}^\ell{}_j = 0$	1. Bianchi Identität
$(\nabla_X R)(Y, Z) + \text{zyklisch}(X, Y, Z) = 0$	$R_{ij}{}^k{}_{\ell;m} + R_{il}{}^k{}_{m;j} + R_{im}{}^k{}_{j;\ell} = 0$	2. Bianchi Identität ³
Falls ∇ der Levi-Civita-Zusammenhang:		
$\langle R(X, Y)Z, W \rangle = \langle R(Z, W)X, Y \rangle$	$R_{ijkl} = R_{klij}$	Komische Symmetrie

Tabelle A.1.: Symmetrien eines Krümmungstensors.

²In der ersten Identität ist $d\omega_\alpha^\beta$ die *äußere Ableitung* der 1-Form ω_α^β und $\omega_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^\beta$ das *Dachprodukt* von zwei 1-Formen. Wir werden diese vermutlich nicht benötigen, sie sind definiert durch $(d\omega_\alpha^\beta)(X, Y) := X(\omega_\alpha^\beta(Y)) - Y(\omega_\alpha^\beta(X)) - \omega_\alpha^\beta([X, Y])$ und $(\omega_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^\beta)(X, Y) := \omega_\alpha^\gamma(X)\omega_\gamma^\beta(Y) - \omega_\alpha^\gamma(Y)\omega_\gamma^\beta(X)$.

³Die zweite Bianchi Identität gilt in der Form $d^\nabla R = 0$ auch für allgemeine Zusammenhänge auf beliebigen Vektorbündeln, wobei d^∇ die durch den Zusammenhang ∇ „getwistete“ äußere Ableitung auf $\Omega^2(M; \text{End}(E))$ ist.

Ricci- und Skalarkrümmung Für eine Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) mit Krümmungstensor R nennt man die beiden Kontraktionen

$$\text{Ric}(X, Y) := \text{tr}(Z \mapsto R(Z, X)Y) \quad (X, Y \in T_p M), \quad (\text{A.25})$$

$$\text{scal} := \text{tr}_g \text{Ric} = g^{ij} \text{Ric}_{ij} \quad (\text{A.26})$$

Riccikrümmung und *Skalarkrümmung*. Die Riccikrümmung ist ein 2-Tensor und es folgt aus der ersten Bianchi-Identität, dass Ric *symmetrisch* ist, d.h. es gilt

$$\text{Ric}(X, Y) = \text{Ric}(Y, X)$$

für beliebige $X, Y \in \Gamma^\infty(TM)$. Die Skalarkrümmung ist eine skalare Funktion.

Ist $\{E_i\}$ ein lokaler Rahmen von TM , so lassen sich die durch $\text{Ric}_{ij} := \text{Ric}(E_i, E_j)$ definierten Komponenten der Riccikrümmung natürlich durch die des Krümmungstensors ausdrücken. Konkret gilt

$$\text{Ric}_{ij} = R_{ki}{}^k{}_j = R_{ikj\ell} g^{k\ell}. \quad (\text{A.27})$$

Schnittkrümmung Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Krümmungstensor R . Für $v, w \in T_p M$ linear unabhängig setzt man

$$K(v, w) := \frac{\langle R(v, w)w, v \rangle}{|v|^2|w|^2 - \langle v, w \rangle^2}. \quad (\text{A.28})$$

Durch explizites Nachrechnen kann man zeigen, dass $K(v, w) = K(a, b)$ gilt sofern $\text{span}\{v, w\} = \text{span}\{a, b\}$ gilt. Durch (A.28) wird also eine (skalare) Funktion auf der Menge der Ursprungsebenen (2-dimensionalen Untervektorräumen) von $T_p M$ definiert. Diese wird *Schnittkrümmung* genannt.

In gewissem Sinne legt die Schnittkrümmung eindeutig den Krümmungstensor fest (siehe Lemma 23.2 in [8]). Ist M zweidimensional, so stimmt die Schnittkrümmung mit der Gaußkrümmung überein.

Theorem A.8 (Schur). *Ist (M, g) zusammenhängend und hängt die Schnittkrümmung nur vom Fußpunkt ab, so ist sie schon insgesamt konstant.*

Beweis. Siehe Kapitel 23 in [8]. □

A.2.4. Zurückziehen von Vektorbündeln und Zusammenhängen

Vergleiche Bemerkung 21. 4 in Kapitel 21 in [8].

Gegeben eine glatte Abbildung $f : N \rightarrow M$ und ein Vektorbündel $p : E \rightarrow M$ mit Zusammenhang ∇ , lassen sich sowohl das Bündel als auch der Zusammenhang mittels f nach N zurückziehen. Man schreibt $f^*E \rightarrow N$ und ∇^f für diese.

A. Wiederholungen aus der Differentialgeometrie und Notationen

Konstruktion des Pullbackbündels: Wir setzen $f^*E := \bigcup_{x \in N} \{x\} \times E_{f(x)}$ und machen daraus mittels Proposition A.2 ein Vektorbündel über N . Die nötigen lokalen Trivialisierungen und Übergangsfunktionen erhalten wir einfach aus denen von E . Sei dazu $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$ ein Vektorbündelatlas von E . Für jedes $\alpha \in \Lambda$ setze $V_\alpha := f^{-1}(U_\alpha)$ und definiere

$$\psi_\alpha : \bigcup_{x \in V_\alpha} E_{f(x)} \rightarrow V_\alpha \times \mathbb{R}^k, \quad (x, v) \mapsto (x, (\text{pr}_2 \circ \phi_\alpha)(v))$$

Für $\alpha, \beta \in \Lambda$ mit $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ sei $\tau_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow \text{GL}_k(\mathbb{R})$ die glatte Abbildung mit $(\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1})(x, v) = (x, \tau_{\alpha\beta}(v))$. Dann gilt einfach

$$(\psi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1})(x, v) = (x, \tau_{\alpha\beta}(f(x))(v)).$$

Die Abbildung $\tau_{\alpha\beta} \circ f : V_\alpha \cap V_\beta \rightarrow \text{GL}_k(\mathbb{R})$ ist natürlich wieder glatt. Somit sind alle Voraussetzungen von Proposition A.2 erfüllt.

Lokale Basisschnitte Wichtig in der Praxis ist häufig vor allem der Umgang mit Schnitten und insbesondere die (geschickte) Wahl von lokalen Basisschnitten. Solche ergeben sich für den Fall des Pullbackbündels f^*E ganz einfach aus welchen von E . Ist nämlich $s \in \Gamma^\infty(E)$ ein Schnitt, so ist $f^*s = s \circ f : N \rightarrow E$ ein Schnitt von f^*E . Und sind $s_1, \dots, s_k \in \Gamma^\infty(E|_U)$ lokale Basisschnitte für E über $U \subset M$, so sind f^*s_1, \dots, f^*s_k lokale Basisschnitte von f^*E über $f^{-1}(U) \subset N$.

Bemerkung A.9. Schnitte eines Pullbackbündels f^*E werden auch als *Schnitte von E längs f* bezeichnet. Vor allem wenn f eine Kurve ist und $E = TM$ spricht man von *Vektorfeldern längs einer Kurve*.

Konstruktion des zurückgezogenen Zusammenhangs Der zurückgezogene Zusammenhang ∇^f auf f^*E ist eindeutig durch folgende Eigenschaft bestimmt:

$$\forall X \in TN, s \in \Gamma^\infty(E) : \quad \nabla_X^f(f^*s) = \nabla_{Df(X)}s. \quad (\text{A.29})$$

Um dies einzusehen, sei $\varphi \in \Gamma^\infty(f^*E)$ beliebig und $X \in TN$. Wähle lokale Basisschnitte $s_1, \dots, s_k \in \Gamma^\infty(E|_U)$ und betrachte die zugehörigen lokalen Basisschnitte f^*s_1, \dots, f^*s_k von f^*E über $f^{-1}(U)$, wobei der Fußpunkt von X in dieser Menge enthalten sein soll. Schreibe $\varphi = \varphi^\alpha(f^*s_\alpha)$ mit $\varphi^\alpha \in C^\infty(f^{-1}(U))$, dann folgt sofern (A.29) als gültig angenommen wird:

$$\nabla_X^f \varphi = \nabla_X^f(\varphi^\alpha f^*s_\alpha) = (X\varphi^\alpha)f^*s_\alpha + \varphi^\alpha \nabla_X^f(f^*s_\alpha) \stackrel{(\text{A.29})}{=} (X\varphi^\alpha)f^*s_\alpha + \varphi^\alpha \nabla_{Df(X)}s_\alpha.$$

Nun kann man umgekehrt ∇^f dadurch konstruieren, dass man die rechte Seite als (lokale) Definition verwendet. Entscheidend ist dabei, dass die Funktionen φ^α nur in Richtung von $X \in TN$ abgeleitet wird. Man muss natürlich noch nachrechnen, dass die rechte Seite nicht von der Wahl der Basisschnitte s_1, \dots, s_k abhängt, was aber nicht schwer ist.

Wir halten die lokale Formel nochmals fest:

$$\nabla_X^f \varphi = \nabla_X^f(\varphi^\alpha f^*s_\alpha) = (X\varphi^\alpha)f^*s_\alpha + \varphi^\alpha \nabla_{Df(X)}s_\alpha \quad (\text{A.30})$$

Proposition A.10 („Lemma von Schwarz“). *Seien $f : M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung und ∇ ein symmetrischer Zusammenhang auf TM , d.h. mit $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$ für alle $X, Y \in \Gamma^\infty(TM)$.⁴ Dann gilt für alle $V, W \in \Gamma^\infty(TN)$*

$$\nabla_V^f Df(W) - \nabla_W^f Df(V) = Df([V, W]). \quad (\text{A.31})$$

Insbesondere gilt bezüglich lokaler Koordinaten (U, x) auf M für alle $i, j = 1, \dots, n$

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}^f \frac{\partial f}{\partial x^j} = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}}^f \frac{\partial f}{\partial x^i}, \quad (\text{A.32})$$

wobei $\frac{\partial f}{\partial x^i} := Df\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)$.

Beweis. Wir rechnen lokal und wählen Koordinaten (U, x) auf N und (V, y) auf N , sodass $f(U) \subset V$ gilt. Schreibe $X = V^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ und $W = W^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ und erinnere, dass

$$Df\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \frac{\partial(y^k \circ f)}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^k}.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \nabla_V^f Df(W) &\stackrel{(\text{A.30})}{=} V \left(W^i \frac{\partial(y^k \circ f)}{\partial x^i} \right) \frac{\partial}{\partial y^k} + W^i \frac{\partial(y^k \circ f)}{\partial x^i} \nabla_{Df(V)} \frac{\partial}{\partial y^k} \\ &= (VW^i) \frac{\partial(y^k \circ f)}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^k} + \left(V \frac{\partial(y^k \circ f)}{\partial x^i} \right) W^i \frac{\partial}{\partial y^k} \\ &\quad + W^i \frac{\partial(y^k \circ f)}{\partial x^i} V^j \frac{\partial(y^l \circ f)}{\partial x^j} \nabla_{\frac{\partial}{\partial y^l}} \frac{\partial}{\partial y^k} \\ &= (VW^i) Df\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) + \underbrace{\frac{\partial^2(y^k \circ f)}{\partial x^i \partial x^j} V^j W^i \frac{\partial}{\partial y^k} + W^i \frac{\partial(y^k \circ f)}{\partial x^i} V^j \frac{\partial(y^l \circ f)}{\partial x^j} \nabla_{\frac{\partial}{\partial y^l}} \frac{\partial}{\partial y^k}}_{\text{symmetrisch in } V, W} \end{aligned}$$

Für die Symmetrie des allerletzten Terms ist wichtig, dass ∇ symmetrisch ist (beachte, dass $[\frac{\partial}{\partial y^i}, \frac{\partial}{\partial y^j}] = 0$, da Koordinatenvektorfelder stets kommutieren). Damit fällt dieser Term bei der folgenden Differenzbildung raus und es bleibt wie gewünscht:

$$\nabla_V^f Df(W) - \nabla_W^f Df(V) = (VW^i - WV^i) Df\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = Df([X, Y]).$$

Die zweite Aussage folgt direkt aus der ersten, da der Kommutator von Koordinatenvektorfeldern stets Null ist. \square

Bemerkung A.11. Ist f eine Einbettung, so kann man sich die ganzen Konstruktionen einfach als Einschränkungen der Objekte in M auf das Bild $f(N) \subset M$ vorstellen, welches dann ja eine Untermannigfaltigkeit ist. Die obigen Konstruktionen funktionieren aber auch dann, wenn f keine Einbettung ist. Zur Übung überlege man sich etwa mal, wie alles für den Fall einer konstanten Abbildung aussieht.

⁴Zum Beispiel der Levi-Civita-Zusammenhang einer Riemannschen Metrik.

A. Wiederholungen aus der Differentialgeometrie und Notationen

Metrizität von Pullbacks des Levi-Civita-Zusammenhangs Der Levi-Civita-Zusammenhang ∇ einer (semi-)Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) erfüllt die als *Metrizität* (oder vor allem bei Verwendung von Indexnotation auch als *Ricci-Lemma*) bezeichnete Regel

$$X \langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle$$

für alle $X, Y, Z \in \Gamma^\infty(TM)$. Diese Regel bleibt auch für Pullbacks erhalten.

Proposition A.12. *Sei (M, g) eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Levi-Civita-Zusammenhang ∇ und sei $f : N \rightarrow M$ glatt. Dann gilt*

$$X \langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X^f Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X^f Z \rangle \quad (\text{A.33})$$

für alle $X \in \Gamma^\infty(TN)$ und $Y, Z \in \Gamma^\infty(f^*TM)$.⁵

Beweis. Man kann dies wieder lokal in Koordinaten nachrechnen und dabei die lokale Formel (A.30) für den zurückgezogenen Zusammenhang ∇^f verwenden. \square

Krümmung eines zurückgezogenen Zusammenhangs

Proposition A.13 (Krümmung des zurückgezogenen Zusammenhangs). *Sei $E \rightarrow M$ ein Vektorbündel mit Zusammenhang ∇ und $f : N \rightarrow M$ glatt. Dann gilt für alle $X, Y \in T_x N$ und $s \in (f^*E)_x = E_{f(x)}$ die Identität*

$$R^f(X, Y)s = R(D_x f(X), D_x f(Y))s. \quad (\text{A.34})$$

⁵In (A.33) sind natürlich beide Seiten als Funktionen auf N zu verstehen.

Literaturverzeichnis

- [1] Manfredo P. do Carmo, *Riemannian Geometry*, Birkhäuser, Boston, Second Printing, 1996.
- [2] J.-H. Eschenburg und E. Heintze, *Comparison Theory for Riccati Equations*, manuscripta math. 68, 209-104, Springer, 1990.
- [3] Dirk Ferus, *Riemannsche Geometrie*, Vorlesungsskript, 2004, <https://page.math.tu-berlin.de/~ferus/DG/RiemGeom.pdf>
- [4] John M. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*, Springer, New York, Second Edition, 2013.
- [5] John M. Lee, *Riemannian Manifolds*, Springer, New York, 1997.
- [6] Barrett O'Neill, *Semi-Riemannian Geometry*, Academic Press, San Diego, 1983.
- [7] Peter Petersen, *Riemannian Geometry*, Springer, New York, Third Edition, 2016.
- [8] Oliver C. Schnürer, *Differentialgeometrie II*, Vorlesungsskript, Universität Konstanz, 2018.
- [9] Jan-Hendrik Treude, *Ricci Curvature Comparison in Riemannian and Lorentzian Geometry*, Diplomarbeit, Universität Freiburg, 2011.