

Übungen zur Vorlesung *Algorithmische Algebraische Geometrie*
Blatt 4

Allgemeiner Hinweis: Alle Aussagen sind stets zu beweisen.

Aufgabe 4.1. (Dickson's Lemma) (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass *Dickson's Lemma* zu folgender Aussage äquivalent ist: Für jede nicht-leere Teilmenge $A \subseteq \mathbb{N}_0^n$ existieren endlich viele Elemente $\alpha(1), \dots, \alpha(s) \in A$ (mit $s \in \mathbb{N}$), sodass es für jedes $\alpha \in A$ ein $i \in \{1, \dots, s\}$ und ein $\gamma \in \mathbb{N}_0^n$ mit $\alpha = \alpha(i) + \gamma$ gibt.

Aufgabe 4.2. (Gröbner-Basen) (2+2 Punkte)

Seien n eine natürliche Zahl, k ein Körper, I ein Ideal von $k[x_1, \dots, x_n]$ und $>$ eine fixierte monomiale Anordnung auf \mathbb{N}_0^n .

- Sei G eine endliche Teilmenge von I . Zeigen Sie, dass G genau dann eine Gröbner-Basis von I ist, wenn für jedes $f \in I$ ein $g \in G$ existiert, sodass der Leitterm von g den Leitterm von f teilt.
- Sei I nun ein Hauptideal von $k[x_1, \dots, x_n]$ mit Erzeuger $f \in k[x_1, \dots, x_n]$ und sei J eine endliche Teilmenge von I , die f enthält. Beweisen Sie, dass J eine Gröbner-Basis von I ist.

Aufgabe 4.3. (Reste im Divisionsalgorithmus) (1+1+2 Punkte)

Seien n eine natürliche Zahl, k ein Körper, I ein Ideal von $k[x_1, \dots, x_n]$ und $>$ eine fixierte monomiale Anordnung auf \mathbb{N}_0^n . Für eine geordnete Menge $G = (g_1, \dots, g_s) \subseteq k[x_1, \dots, x_n]$ (mit $s \in \mathbb{N}$) und ein $f \in k[x_1, \dots, x_n]$ bezeichne \overline{f}^G ein Restglied von f bei Division durch G .

- Sei G eine endliche Basis von I mit $\overline{f}^G = 0$ für jedes $f \in I$. Beweisen Sie, dass G eine Gröbner-Basis von I ist.
- Seien G und G' zwei Gröbner-Basen von I bezüglich $>$. Zeigen Sie, dass $\overline{f}^G = \overline{f}^{G'}$ für jedes $f \in k[x_1, \dots, x_n]$ gilt.
- Sei G eine Gröbner-Basis von I . Beweisen Sie, dass für alle $f, g \in k[x_1, \dots, x_n]$ die folgenden beiden Rechenregeln gelten:
 - $\overline{f+g}^G = \overline{f}^G + \overline{g}^G$
 - $\overline{fg}^G = \overline{f}^G \overline{g}^G$

Zusatzaufgabe für Interessierte. (Monimiale Anordnungen III)

(2+2 Punkte)

Seien $n, m \in \mathbb{N}$.

- (a) Betrachte die Relation $>_{\text{mixed}}$ auf \mathbb{N}_0^{n+m} , die wie folgt für alle $\alpha, \gamma \in \mathbb{N}_0^n$ und $\beta, \delta \in \mathbb{N}_0^m$ definiert ist:

$$(\alpha, \beta) <_{\text{mixed}} (\gamma, \delta) \Leftrightarrow \alpha <_{\text{lex}} \gamma \vee (\alpha = \gamma \wedge \beta <_{\text{grlex}} \delta).$$

Zeigen Sie, dass $>_{\text{mixed}}$ eine monomiale Anordnung auf \mathbb{N}_0^{n+m} ist.

- (b) Sei $>_\sigma$ eine fixierte monomiale Anordnung auf \mathbb{N}_0^n und sei $u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{N}_0^n$. Betrachte die Relation $>_{u, \sigma}$ auf \mathbb{N}_0^n , die wie folgt für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ definiert ist:

$$\alpha <_{u, \sigma} \beta \Leftrightarrow u \cdot \alpha < u \cdot \beta \vee (u \cdot \alpha = u \cdot \beta \wedge \alpha <_\sigma \beta).$$

- (i) Zeigen Sie, dass $>_{u, \sigma}$ eine monomiale Anordnung auf \mathbb{N}_0^n ist.
(ii) Bestimmen Sie ein geeignetes $u \in \mathbb{N}_0^n$, sodass $>_{u, \text{lex}}$ gerade $>_{\text{grlex}}$ entspricht.

Abgabe: Donnerstag, den 20. November 2025, um 10:00 Uhr in den Briefkasten Nr. 17. Achten Sie auf eine saubere und lesbare Darstellung und heften Sie Ihre einzelnen Blätter zusammen.