Prof. Dr. Salma Kuhlmann
Laura Wirth

Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Wintersemester 2025/2026

Übungen zur Vorlesung *Algorithmische Algebraische Geometrie*
Blatt 5

Allgemeiner Hinweis: Alle Aussagen sind stets zu beweisen.

Seien stets $n, m \in \mathbb{N}$, sei $>$ eine monimiale Anordnung auf $\mathbb{N}_0^n$ und sei k ein Körper.

Definition. Wir nennen eine Basis $\{x^{\alpha(1)}, \dots, x^{\alpha(s)}\}$ für ein monomiales Ideal $I \trianglelefteq k[x_1, \dots, x_n]$ *minimal*, wenn folgende Bedingung erfüllt ist:

$$\forall i, j \in \{1, \dots, s\}, i \neq j \colon x^{\alpha(i)} \nmid x^{\alpha(j)}.$$

Aufgabe 5.1. (Charakterisierung minimaler Gröbner-Basen) (3+1 Punkte)
Sei $I \trianglelefteq k[x_1, \dots, x_n]$.

(a) Sei $G \subseteq k[x_1, \dots, x_n]$ eine Gröbner-Basis für I bzgl. $>$ so, dass $\mathrm{LC}(g) = 1$ für alle $g \in G$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

  (i) G ist eine minimale Gröbner-Basis für I bzgl. $>$.
  (ii) Für alle $H \subsetneq G$ ist H keine Gröbner-Basis für I bzgl. $>$.
  (iii) $\mathrm{LT}(G)$ ist die *minimale Basis* für $\langle \mathrm{LT}(I) \rangle$ (siehe Definition oben).

(b) Seien $G, \widetilde{G}$ zwei minimale Gröbner-Basen für I bzgl. $>$. Zeigen Sie, dass $\mathrm{LT}(G) = \mathrm{LT}(\widetilde{G})$ und $|G| = |\widetilde{G}|$.

Aufgabe 5.2. (Buchbergers Algorithmus) (2+1+1 Punkte)
Sei $I = \langle f_1, f_2, f_3 \rangle \trianglelefteq \mathbb{Q}[x, y]$ ein Ideal, wobei $f_1 = x^3y^2 - 1$, $f_2 = x^7 - y$ und $f_3 = x^4 - y^3$.

(i) Berechnen Sie mit Buchbergers Algorithmus eine Gröbner-Basis für I bzgl. $>_{\mathrm{lex}}$.

(ii) Bestimmen Sie die reduzierte Gröbner-Basis für I bzgl. $>_{\mathrm{lex}}$.

Aufgabe 5.3. (Verallgemeinerter Eliminationssatz) (2+2 Punkte)
Sei $\ell \in \mathbb{N}$ mit $\ell \leq n$. Eine monomiale Anordnung $>$ auf $\mathbb{N}_0^n$ ist vom ℓ*–Eliminationstyp*, falls für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ gilt:

$$[(\exists i \in \{1, \dots, l\} \colon \alpha_i \neq 0) \wedge (\forall i \in \{1, \dots, l\} \colon \beta_i = 0)] \Rightarrow \alpha > \beta.$$

(i) Betrachte die Relation $>_\ell$ auf $\mathbb{N}_0^n$, die wie folgt für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ definiert ist:

$$\alpha >_\ell \beta :\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i > \sum_{i=1}^{\ell} \beta_i \vee \left(\sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i = \sum_{i=1}^{\ell} \beta_i \wedge \alpha >_{\mathrm{g\,rev\,lex}} \beta \right).$$

Zeigen Sie, dass $>_\ell$ eine monomiale Anordnung vom ℓ–Eliminationstyp ist.

Hinweis: Es gibt einen recht kurzen und eleganten Beweis, bei dem die üblichen Bedingungen (Transitivität, Trichotomie, Wohlordnung, Verträglichkeit mit Addition) nicht nachgeprüft werden müssen.

(ii) Beweisen Sie die folgende Verallgemeinerung des Eliminationssatzes:
Sei $I \trianglelefteq k[x_1, \ldots, x_n]$ und sei $G \subseteq k[x_1, \ldots, x_n]$ eine Gröbner-Basis für I bzgl. einer monomialen Anordnung vom ℓ–Eliminationstyp. Dann ist $G \cap k[x_{\ell+1}, \ldots, x_n]$ eine Gröbner-Basis für $I_\ell := I \cap k[x_{\ell+1}, \ldots, x_n]$.

Zusatzaufgabe für Interessierte. (4 Punkte)

Seien $A = (a_{i,j})_{i,j} \in k^{n\times m} \setminus \{0\}$ eine Matrix, $R = (r_{i,j})_{i,j} \in k^{n\times m}$ die reduzierte Zeilenstufenform von A (vgl. Definition 6.2, Lineare Algebra I, WiSe 2023/24) und sei $t := \mathrm{Rang}(A)$. Für $i \in \{1, \ldots, n\}$ setze

$$f_i := \sum_{j=1}^{m} a_{i,j} x_j \text{ und } g_i := \sum_{j=1}^{m} r_{i,j} x_j.$$

Setze ferner $I := \langle f_1, \ldots, f_n \rangle \trianglelefteq k[x_1, \ldots, x_m]$ und $G := \{g_1, \ldots, g_t\} \subseteq k[x_1, \ldots, x_m]$.
Zeigen Sie, dass G die reduzierte Gröbner-Basis für I bzgl. $>_{\mathrm{lex}}$ ist.

Abgabe: Donnerstag, den 27. November 2025, um 10:00 Uhr in den Briefkasten Nr. 17. Achten Sie auf eine saubere und lesbare Darstellung und heften Sie Ihre einzelnen Blätter zusammen.