Prof. Dr. Salma Kuhlmann
Laura Wirth

Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Wintersemester 2025/2026

Übungen zur Vorlesung *Algorithmische Algebraische Geometrie*
Blatt 6

Allgemeiner Hinweis: Alle Aussagen sind stets zu beweisen.

Aufgabe 6.1. (Resultante und gemeinsame Faktoren) (1+3 Punkte)

(a) Zeigen oder widerlegen Sie, dass die beiden Polynome $f = x^5 - 3x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 7x + 6$ und $g = x^4 + x^2 + 1$ einen gemeinsamen Faktor in $\mathbb{Q}[x]$ haben.

(b) Sei k ein Körper und seien $f, g \in k[x]$ zwei Polynome mit $\deg(f) > 0$ oder $\deg(g) > 0$. Beweisen Sie, die folgenden beiden Aussagen:

(i) $\mathrm{Res}(f, g, x) = (-1)^{\deg(f)\deg(g)}\mathrm{Res}(g, f, x)$.

(ii) $\mathrm{Res}(\lambda f, \mu g, x) = \lambda^{\deg(g)}\mu^{\deg(f)}\mathrm{Res}(f, g, x)$ für alle $\lambda, \mu \in k \setminus \{0\}$.

Aufgabe 6.2. (Eliminationssatz) (2+2 Punkte)

Sei $I \trianglelefteq \mathbb{C}[x, y]$, sei $I_1 = I \cap \mathbb{C}[y]$ das erste Eliminationsideal und bezeichne $\pi_1 \colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ die affine Projektion auf die y–Achse. Zeigen Sie, dass $\mathcal{V}(I_1) = \pi_1(\mathcal{V}(I))$ in den folgenden beiden Fällen gilt:

(i) $I_1 \neq \{0\}$.

(Hinweis: Verwenden Sie den Fortsetzungssatz.)

(ii) $I = \langle f, g \rangle$ für $f, g \in \mathbb{C}[x, y]$ mit $\deg(f) > 0, \deg(g) > 0$ und $\mathrm{Res}(f, g, x) \neq 0$.

Aufgabe 6.3. (Resultante und Polynomdivision) (2+2 Punkte)

Sei k ein Körper, seien $f, g \in k[x]$ zwei Polynome mit $\deg(f) \geq \deg(g) > 0$ und setze $\ell = \deg(f)$, $m = \deg(g)$, sowie $c_0 = \mathrm{LC}(f), d_0 = \mathrm{LC}(g)$.

(a) Sei $\tilde{f} := f - \frac{c_0}{d_0}x^{\ell-m}g$ so, dass $\tilde{f} \neq 0$. Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{Res}(f, g, x) = (-1)^{m(\ell-\deg(\tilde{f}))}d_0^{\ell-\deg(\tilde{f})}\mathrm{Res}(\tilde{f}, g, x).$$

(Hinweis: Betrachten Sie zunächst den Fall $\deg(\tilde{f}) = \ell - 1$.)

(b) Seien $q, r \in k[x]$ so, dass $f = qg + r$ mit $\deg(r) < \deg(g)$ oder $r = 0$. Zeigen Sie:

(i) Falls $r \neq 0$, so gilt

$$\mathrm{Res}(f, g, x) = (-1)^{m(\ell - \deg(r))} d_0^{\ell - \deg(r)} \mathrm{Res}(r, g, x).$$

(ii) Falls $r = 0$, so gilt

$$\mathrm{Res}(f, g, x) = \mathrm{Res}(r, g, x),$$

wobei $\mathrm{Res}(0, g, x) := 0$.

Zusatzaufgabe für Interessierte. (Resultante und Minimalpolynom) (2+2 Punkte)

(i) Seien $f, g \in \mathbb{C}[x] \setminus \mathbb{C}$ zwei Polynome und setze $g_y := g(y - x) \in \mathbb{C}[x, y]$. Zeigen Sie, dass

$$\mathcal{V}(\mathrm{Res}(f, g_y, x)) = \mathcal{V}(f) + \mathcal{V}(g).$$

(ii) Konstruieren Sie mit Hilfe von (i) das Minimalpolynom von $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$ über $\mathbb{Q}$.

Abgabe: Donnerstag, den 4. Dezember 2025, um 10:00 Uhr in den Briefkasten Nr. 17. Achten Sie auf eine saubere und lesbare Darstellung und heften Sie Ihre einzelnen Blätter zusammen.