Prof. Dr. Salma Kuhlmann
Laura Wirth

Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Wintersemester 2025/2026

Übungen zur Vorlesung *Algorithmische Algebraische Geometrie*
Blatt 7

Allgemeiner Hinweis: Alle Aussagen sind stets zu beweisen.

Seien stets $n \in \mathbb{N}$ und k ein Körper.

Aufgabe 7.1. (Beweis des Fortsetzungssatzes) (4 Punkte)
Seien $f, g \in k[x_2, \ldots, x_n][x_1]$ zwei Polynome geschrieben als

$$f = c_0(x_2, \ldots, x_n)x_1^l + \cdots + c_l(x_2, \ldots, x_n) \text{ und}$$
$$g = d_0(x_2, \ldots, x_n)x_1^m + \cdots + d_m(x_2, \ldots, x_n)$$

mit $l, m \in \mathbb{N}$ sowie $c_0 \neq 0, d_0 \neq 0$. Setze $h := \operatorname{Res}(f, g, x_1)$. Ferner sei $a = (a_2, \ldots, a_n) \in k^{n-1}$ so, dass $l = \deg(f(x_1, a))$. Zeigen Sie, dass

$$h(a) = c_0(a)^{m-p} \cdot \operatorname{Res}(f(x_1, a), g(x_1, a), x_1),$$

wobei $p = \deg(g(x_1, a))$.
(Hinweis: Die Fälle $p = m$ und $p = m - 1$ wurden bereits in der Vorlesung behandelt. Sie können diese daher voraussetzen.)

Aufgabe 7.2. (Fortsetzungssatz, konstruktive Version) (4 Punkte)
Sei k algebraisch abgeschlossen und sei $I := \langle f_1, \ldots, f_s \rangle \trianglelefteq k[x_1, \ldots, x_n]$ ein Ideal. Ferner sei der Punkt $a = (a_2, \ldots, a_n) \in \mathcal{V}(I_1)$ wie im Fortsetzungssatz und sei $g \in k[x_1]$ ein Erzeuger des Ideals $\{f(x_1, a) : f \in I\}$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen für $h(x_1) := \operatorname{ggT}(f_1(x_1, a), \ldots, f_s(x_1, a))$:

(i) Das Polynom $h \in k[x_1]$ ist nicht konstant.
(Hinweis: Verwenden Sie den Fortsetzungssatz.)

(ii) Für alle $a_1 \in \mathcal{V}(h)$ gilt $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathcal{V}(I)$.

(iii) Es gilt $\mathcal{V}(g) = \mathcal{V}(h)$.

Aufgabe 7.3. (Hilberts Nullstellensatz: schwache Version) (4 Punkte)
Sei $f \in k[x_1, \ldots, x_n] \setminus k$ ein Polynom geschrieben als $f = h_N + \cdots + h_0$ mit $N \in \mathbb{N}$ und $h_i \in k[x_1, \ldots, x_n]$ homogen vom Grad i (d.h. alle Monome in h_i haben Totalgrad i). Im Beweis des schwachen Hilbertschen Nullstellensatzes wurde f mit Hilfe eines linearen Variablenwechsels in die Form

$$\tilde{f} = c_0(a_2, \ldots, a_n)\tilde{x}_1^n + \cdots + c_N(a_2, \ldots, a_n) \in k[a_2, \ldots, a_n][\tilde{x}_1]$$

überführt. Zeigen Sie die folgenden Aussagen

(i) Es gilt $h_N(1, a_2, \ldots, a_n) = c_0(a_2, \ldots, a_n)$ in $k[a_2, \ldots, a_n]$.

(ii) Es ist genau dann $h_N(x_1, \ldots, x_n)$ das Nullpolynom in $k[x_1, \ldots, x_n]$, wenn $h_N(1, a_2, \ldots, a_n)$ das Nullpolynom in $k[a_2, \ldots, a_n]$.

(iii) Das Polynom $c_0(a_2, \ldots, a_n)$ ist nicht das Nullpolynom in $k[a_2, \ldots, a_n]$.

Zusatzaufgabe für Interessierte. (Radikale) (1+1+1+1 Punkte)
Sei A ein kommutativer Ring mit 1 und seien $I, J \trianglelefteq A$ zwei Ideale. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(i) $(\exists m \in \mathbb{N}\colon I^m \subseteq J) \Rightarrow (\sqrt{I} \subseteq \sqrt{J})$

(ii) $\sqrt{I + J} = \sqrt{\sqrt{I} + \sqrt{J}}$

(iii) $\sqrt{IJ} = \sqrt{I \cap J}$

(iv) $[I = \sqrt{I}] \Leftrightarrow [\forall a \in A\colon (a^2 \in I \Rightarrow a \in I)]$

Abgabe: Donnerstag, den 11. Dezember 2025, um 10:00 Uhr in den Briefkasten Nr. 17. Achten Sie auf eine saubere und lesbare Darstellung und heften Sie Ihre einzelnen Blätter zusammen.