Prof. Dr. Salma Kuhlmann
Laura Wirth

Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Wintersemester 2025/2026

---

## Übungen zur Vorlesung *Algorithmische Algebraische Geometrie*
## Blatt 8

**Allgemeiner Hinweis:** Alle Aussagen sind stets zu beweisen.

Seien stets $n \in \mathbb{N}$ und $k$ ein Körper.

**Aufgabe 8.1.** (Zariski-Topologie) (2+1+1 Punkte)

(a) Sei $(X, \tau)$ ein topologischer Raum und seien $S, T \subseteq X$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

  (i) $(S \subseteq T) \Rightarrow \overline{S} \subseteq \overline{T}$

  (ii) $\overline{S \cup T} = \overline{S} \cup \overline{T}$

(b) Zeigen Sie, dass die sogenannte *Zariski-Topologie* $\tau_{\mathrm{Z}}$ auf $k^n$ definiert durch $\tau_{\mathrm{Z}} := \{k^n \setminus \mathcal{V}(I) : I \trianglelefteq k[x_1, \ldots, x_n]\}$ tatsächlich eine Topologie auf $k^n$ definiert.

(c) Sei $k$ unendlich und seien $f, g \in k[x_1, \ldots, x_n]$ zwei Polynome mit $g \neq 0$. Zeigen Sie, dass aus $f \in \mathcal{I}(k^n \setminus \mathcal{V}(g))$ bereits $f = 0$ folgt.

**Aufgabe 8.2.** (Irreduzible Varietäten) (2+2 Punkte)

(i) Zeigen Sie, dass die affine Varietät $\mathcal{V}(x^2 + y^2) \subseteq \mathbb{C}^2$ nicht irreduzibel ist.

(ii) Zeigen Sie, dass die affine Varietät $\mathcal{V}(x^2 + y^2 - z^2) \subseteq \mathbb{C}^3$ irreduzibel ist.

**Aufgabe 8.3.** (Maximale Ideale) (2+2 Punkte)
Sei $I \trianglelefteq k[x_1, \ldots, x_n]$ ein Ideal.

(a) Sei $k$ algebraisch abgeschlossen. Zeigen Sie, dass $I$ genau dann maximal ist, wenn ein Punkt $(a_1, \ldots, a_n) \in k^n$ existiert so, dass $I = \langle x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n \rangle$.

*(Hinweis: Verwenden Sie Hilberts Nullstellensatz: schwache Version.)*

(b) Sei $k$ nicht algebraisch abgeschlossen. Zeigen Sie, dass für ein maximales Ideal $I$ die affine Varietät $\mathcal{V}(I)$ entweder leer ist oder genau ein Element enthält.

**Zusatzaufgabe für Interessierte.** (1+3 Punkte)

Für ein Polynom $f \in k[x_1, \ldots, x_n]$ ist $f^{\mathrm{h}} := x_0^{\deg(f)} f(x_1/x_0, \ldots, x_n/x_0) \in k[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ ein homogenes Polynom in $k[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ mit $\deg(f^{\mathrm{h}}) = \deg(f)$, das die *Homogenisierung* von $f$ (bzgl. $x_0$) genannt wird.

(a) Sei $f \in k[x_1]$. Zeigen Sie, dass $f$ genau dann eine Nullstelle in $k$ besitzt, wenn die Homogenisierung $f^{\mathrm{h}} \in k[x_0, x_1]$ (bzgl. $x_0$) eine Nullstelle in $k^2 \setminus \{0\}$ besitzt.

(b) Sei nun $k$ nicht algebraisch abgeschlossen. Zeigen Sie die folgenden beiden Aussagen:

(i) Für jedes $m \in \mathbb{N}$ existiert ein $f \in k[x_1, \ldots, x_m]$ so, dass $\mathcal{V}(f) = \{0\}$.
*(Hinweis: Zeigen Sie die Aussage induktiv unter Verwendung von Teil (a).)*

(ii) Für jede affine Varietät $V \subseteq k^n$ existiert ein $f \in k[x_1, \ldots, x_n]$ so, dass $V = \mathcal{V}(f)$.


**Abgabe:** Donnerstag, den 18. Dezember 2025, um 10:00 Uhr in den Briefkasten Nr. 17. Achten Sie auf eine saubere und lesbare Darstellung und heften Sie Ihre einzelnen Blätter zusammen.