Prof. Dr. Salma Kuhlmann
Laura Wirth

Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Sommersemester 2025

Übungen zur Vorlesung *Algebra II*
Blatt 3 – Musterlösung

Allgemeiner Hinweis: Alle Aussagen sind stets zu beweisen.

Zusatzaufgabe für Interessierte.

Sei K ein Körper und sei V ein $K[X]$-Modul.

(a) Zeigen Sie, dass V ein K-Vektorraum ist.

Lösung:
Klar mit $K \subseteq K[X]$ unter Einbettung.

(b) Beweisen Sie die Existenz einer eindeutigen K-linearen Abbildung $\varphi \colon V \to V$ von $K[X]$-Moduln, sodass die Skalarmultiplikation $\cdot$ auf V als $K[X]$-Modul für alle $f \in K[X]$ und alle $v \in V$ durch $f(x) \cdot v = f(\varphi)(v)$ gegeben ist.

Lösung:
Betrachte die Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi_X \colon V &\to V \\ v &\mapsto Xv. \end{aligned}$$

Da V ein $K[X]$-Modul ist, ist diese Abbildung wohldefiniert (klar) und K-linear. In der Tat, seien $v, w \in V$, $k \in K$ beliebig aber fest. Dann folgt

$$\varphi_X(v + kw) = X(v + kw) = Xv + Xkw = Xv + k(Xw) = \varphi_X(v) + k\varphi_X(w),$$

da V ein $K[X]$-Modul ist und $K \subseteq K[X]$ unter Einbettung gilt.

Sei nun $f(X) := \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in K[X]$ und $v \in V$ beliebig aber fest und bemerke

$$f(X) \cdot v = \left(\sum_{i=0}^{n} a_i X^i \right) \cdot v \underset{(a)}{=} \sum_{i=0}^{n} a_i (X^i v) = \sum_{i=0}^{n} a_i \varphi_X^i(v) = f(\varphi_X)(v)$$

wie gefordert.

Für die Eindeutigkeit bemerke letztendlich, dass für eine geeignete K-lineare Abbildung $\varphi \colon V \to V$ von $K[X]$-Moduln für alle $v \in V$ und $f(X) := X \in K[X]$ stets

$$\varphi(v) = f(\varphi)v = f(X) \cdot v = X \cdot v \underset{(a)}{=} Xv$$

gelten muss. $\square$

(c) Folgern Sie die Existenz einer Bijektion

$$\psi\colon \{V \mid V \text{ ist } K[X]\text{-Modul}\} \to \{(V,\varphi) \mid V \text{ ist } K\text{-Vektorraum}, \varphi\colon V \to V \text{ ist } K\text{-linear}\}.$$

Lösung:

Setze mit φ_X wie in (b)

$$\begin{aligned}\psi\colon \{V \mid V \text{ ist } K[X]\text{-Modul}\} &\to \{(V,\varphi) \mid V \text{ ist } K\text{-Vektorraum}, \varphi\colon V \to V \text{ ist } K\text{-linear}\}\\ V &\mapsto (V,\varphi_X).\end{aligned}$$

Diese ist wohldefiniert nach (a) und (b). Setze ferner

$$\begin{aligned}\psi'\colon \{(V,\varphi) \mid V \text{ ist } K\text{-Vektorraum}, \varphi\colon V \to V \text{ ist } K\text{-linear}\} &\to \{V \mid V \text{ ist } K[X]\text{-Modul}\}\\ (V,\varphi_X) &\mapsto V\end{aligned}$$

und bemerke, dass diese nach Aufgabe 3.3 (a) wohldefiniert ist.

Ferner gilt für ein beliebiges $K[X]$-Modul V schon

$$\psi'(\psi(V)) = \psi'(V,\varphi_X) \overset{3.3(a)}{=} V,$$

sowie für einen beliebigen K-Vektorraum V und einer K-linearen Abbildung $\varphi\colon V \to V$ schon

$$\psi(\psi'(V,\varphi)) = \psi(V) = (V,\varphi_X) \overset{(b)}{=} (V,\varphi),$$

wobei in der letzten Gleichheit insbesondere die in (b) gezeigte Eindeutigkeit ausgenutzt wurde. Folglich sind ψ und ψ' zueinander invers und ψ damit insbesondere bijektiv. $\square$