

---

**Übungen zur Vorlesung *Algebra II***  
**Blatt 4**

**Allgemeiner Hinweis:** Alle Aussagen sind stets zu beweisen.

---

**Definition.**

Sei  $R$  ein kommutativer Ring mit 1 und sei  $P$  ein Primideal von  $R$ , dann bezeichnet

$$\text{ht}(P) := \sup\{n \in \mathbb{N}_0 \mid \exists P_0, \dots, P_n \text{ Primideale von } R: \\ P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq \dots \subsetneq P_n = P\} \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$$

die *Höhe* von  $P$ .

**Krullscher Hauptidealsatz.**

Sei  $R$  ein noetherscher Integritätsbereich, sei  $x \in R \setminus \{0\}$  und sei  $P$  ein Primideal von  $R$ , das minimal bezüglich  $x \in P$  ist. Dann gilt  $\text{ht}(P) \leq 1$ .

---

**Aufgabe 4.1.**

(2+2 Punkte)

- (a) Leiten Sie für endlich erzeugte abelsche Gruppen ein Analogon zum *Struktursatz für endlich erzeugte Moduln über HIR* (Satz 6.8) her.
- (b) Formulieren und begründen Sie eine Präzisierung Ihrer Formulierung aus (a) für endliche abelsche Gruppen.

**Aufgabe 4.2.**

(2+2 Punkte)

- (a) Erstellen Sie eine vollständige Liste aller  $\mathbb{Z}$ -Moduln der Mächtigkeit 180 bis auf Isomorphie.
- (b) Erstellen Sie eine vollständige Liste aller abelschen Gruppen der Mächtigkeit 1350 bis auf Isomorphie.

**Aufgabe 4.3.**

(1+1+2 Punkte)

Sei  $R$  ein noetherscher Integritätsbereich.

- (a) Zeigen Sie, dass jede Nicht-Einheit  $a \in R \setminus \{0\}$  ein Produkt irreduzibler Elemente von  $R$  ist.
- (b) Beweisen Sie, dass falls jedes irreduzible Element von  $R$  ein Primelement ist, dann  $R$  schon ein faktorieller Ring ist.
- (c) Zeigen Sie, dass  $R$  genau dann faktoriell ist, wenn jedes Primideal von  $R$  der Höhe 1 ein Hauptideal ist.

*Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis den Krullschen Hauptidealsatz verwenden.*

**Zusatzaufgabe für Interessierte.**

(keine Abgabe)

- (a) Erarbeiten Sie ein Beispiel eines noetherschen faktoriellen Integritätsbereiches, der kein Hauptidealbereich ist.
- (b) Erarbeiten Sie ein Beispiel eines faktoriellen Integritätsbereiches, der nicht noethersch ist.

**Abgabe:** Dienstag, den 13. Mai 2025, um 10:00 Uhr in den Briefkasten Nr. 17. Achten Sie auf eine saubere und lesbare Darstellung und heften Sie Ihre einzelnen Blätter zusammen.