Prof. Dr. Salma Kuhlmann
Laura Wirth

Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Sommersemester 2025

Übungen zur Vorlesung *Algebra II*
Blatt 5

Allgemeiner Hinweis: Alle Aussagen sind stets zu beweisen.

Aufgabe 5.1. (3+1 Punkte)

Sei R ein faktorieller Ring, sei $K := \mathrm{Quot}(R)$ der Quotientenkörper von R, sei L/K eine Körpererweiterung von K und sei $\alpha \in L$ algebraisch über K.

(a) Zeigen Sie, dass α genau dann ganz über R ist, wenn das Minimalpolynom von α über K bereits in $R[X]$ liegt.

(b) Folgern Sie, dass ein $\beta \in K$ genau dann ganz über R ist, wenn $\beta \in R$ gilt.

Aufgabe 5.2. (1+1+2 Punkte)

Sei B ein kommutativer Ring mit 1 und sei A ein Unterring von B, sodass B ganz über A ist. Sei ferner $\mathfrak{b}$ ein Ideal von B und setze $\mathfrak{a} := \mathfrak{b} \cap A$. Bemerken Sie zunächst, dass $\mathfrak{a}$ ein Ideal von A ist.

(a) Zeigen Sie, dass $B/\mathfrak{b}$ ganz über $A/\mathfrak{a}$ ist.

Sei nun S eine multiplikative Teilmenge von A mit $0 \notin S$.

(b) Zeigen Sie, dass $S^{-1}B$ ganz über $S^{-1}A$ ist.

Seien nun zudem A, B integer und A ganz abgeschlossen.

(c) Zeigen Sie, dass $S^{-1}A$ ganz abgeschlossen ist.

Aufgabe 5.3. (2+2 Punkte)

Sei B ein Integritätsbereich und sei A ein Unterring von B, sodass B ganz über A ist.

(a) Beweisen Sie, dass B genau dann ein Körper ist, wenn A ein Körper ist.

Sei nun ferner $\mathfrak{q}$ ein Primideal von B und $\mathfrak{p} := \mathfrak{q} \cap A$. Bemerken Sie zunächst, dass $\mathfrak{p}$ ein Primideal von A ist.

(b) Zeigen Sie, dass $\mathfrak{q}$ genau dann ein maximales Ideal von B ist, wenn $\mathfrak{p}$ ein maximales Ideal von A ist.

Definition

Sei R ein kommutativer Ring mit 1 und sei $n \in \mathbb{N}$.

(i) Ein *symmetrisches Polynom* $p \in R[X_1, \ldots, X_n]$ erfüllt für jede Permutationen $\sigma \in S_n$ die Bedingung $p\left(X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(n)}\right) = p(X_1, \ldots, X_n)$.

(ii) Die *elementarsymmetrischen Polynome* von $R[X_1, \ldots, X_n]$ entsprechen

$$s_0(X_1, \ldots, X_n) :\equiv 1$$

und

$$s_k(X_1, \ldots, X_n) := \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} X_{i_1} \cdot \ldots \cdot X_{i_k} \in R[X_1, \ldots, X_n]$$

mit $k \in \{1, \ldots, n\}$.

Zusatzaufgabe für Interessierte. (ohne Abgabe)

Sei R ein kommutativer Ring mit 1 und sei $n \in \mathbb{N}$.

(a) Zeigen Sie, dass jedes elementarsymmetrische Polynom von $R[X_1, \ldots, X_n]$ ein symmetrisches Polynom ist.

Sei nun R ein Integritätsbereich, sei $K := \mathrm{Quot}(R)$ der Quotientenkörper von R, sei $f \in R[X]$ ein normiertes Polynom, sei L/K ein Zerfällungskörper von f und seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in L$ mit $m \in \mathbb{N}_0$ alle Nullstellen von f.

(b) Zeigen Sie, dass die Koeffizienten von f bis auf Vorzeichen durch elementarsymmetrische Polynome von $R[X_1, \ldots, X_m]$ in den Nullstellen $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in L$ von f gegeben sind.

(c) Erläutern Sie den Wahrheitsgehalt der Aussage aus Teilaufgabe (b) anhand des Polynoms $f(X) = X^4 + 2X^3 - 16X^2 - 2X + 15 \in \mathbb{Z}[X]$.

Abgabe: Dienstag, den 20. Mai 2025, um 10:00 Uhr in den Briefkasten Nr. 17. Achten Sie auf eine saubere und lesbare Darstellung und heften Sie Ihre einzelnen Blätter zusammen.