Prof. Dr. Salma Kuhlmann
Laura Wirth

Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Sommersemester 2025

Übungen zur Vorlesung *Algebra II*
Blatt 5 – Musterlösung

Allgemeiner Hinweis: Alle Aussagen sind stets zu beweisen.

Zusatzaufgabe für Interessierte.
Sei R ein kommutativer Ring mit 1 und sei $n \in \mathbb{N}$.

(a) Zeigen Sie, dass jedes elementarsymmetrische Polynom von $R[X_1, \ldots, X_n]$ ein symmetrisches Polynom ist.

Sei nun R ein Integritätsbereich, sei $K := \operatorname{Quot}(R)$ der Quotientenkörper von R, sei $f \in R[X]$ ein normiertes Polynom, sei L/K ein Zerfällungskörper von f und seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in L$ mit $m \in \mathbb{N}_0$ alle Nullstellen von f.

(b) Zeigen Sie, dass die Koeffizienten von f bis auf Vorzeichen durch elementarsymmetrische Polynome von $R[X_1, \ldots, X_m]$ in den Nullstellen $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in L$ von f gegeben sind.

(c) Erläutern Sie den Wahrheitsgehalt der Aussage aus Teilaufgabe (b) anhand des Polynoms $f(X) = X^4 + 2X^3 - 16X^2 - 2X + 15 \in \mathbb{Z}[X]$.

Lösung:

(a) Betrachte $p(X_1, \ldots, X_n, X) := \prod_{i=1}^{n} (X - X_i)$ in dem Polynomring $R[X_1, \ldots, X_n, X]$ und bemerke

$$\begin{aligned} p(X_1, \ldots, X_n, X) &:= \prod_{i=1}^{n} (X - X_i) \\ &= X^n - \left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) X^{n-1} + \left(\sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} X_{i_1} X_{i_2}\right) X^{n-1} \\ &\quad - \ldots + (-1)^n \left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right) \\ &= s_0(X_1, \ldots, X_n) X^n - s_1(X_1, \ldots, X_n) X^{n-1} + \ldots + (-1)^n s_n. \end{aligned} \tag{1}$$

Sei nun $\sigma \in S_n$ beliebig aber fest und interpretiere σ als Permutation in S_{n+1} ($n+1$ wird fixiert). Aus der Produktdarstellung von p ist klar ersichtlich, dass

$$p(\sigma(X_1, \ldots, X_n, X)) = p(\sigma(X_1, \ldots, X_n), X) = p(X_1, \ldots, X_n, X)$$

gilt. Durch einen Koeffizientenvergleich in (1) wird nun aber erkenntlich, dass auch

$$s_k(\sigma(X_1, \dots, X_n)) = s_k(X_1, \dots, X_n)$$

für alle $k \in \{0, \dots, n\}$ gilt. Per Definition sind die elementarsymmetrischen Polynome $s_0, \dots, s_k$ folglich symmetrisch in $R[X_1, \dots, X_n]$. □

(b) Bemerke zunächst, dass f in dem Zerfällungskörper L von f vollständig in Linearfaktoren der Art $X - \alpha_i$ zerfällt. Betrachte daher in Anlehnung an Teilaufgabe (a) das Polynom $p(\alpha_1, \dots, \alpha_m, X) := \prod_{i=1}^{m}(X - \alpha_i) \in R[\alpha_1, \dots, \alpha_m, X]$ und berechne

$$\begin{aligned} p(\alpha_1, \dots, \alpha_m, X) &:= \prod_{i=1}^{m}(X - \alpha_i) \\ &= X^m - \left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i\right) X^{m-1} + \left(\sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq m} \alpha_{i_1}\alpha_{i_2}\right) X^{m-1} \\ &\quad - \ldots + (-1)^m \left(\prod_{i=1}^{m} \alpha_i\right) \\ &= s_0(\alpha_1, \dots, \alpha_m)X^m - s_1(\alpha_1, \dots, \alpha_m)X^{m-1} \\ &\quad + \ldots + (-1)^m s_m(\alpha_1, \dots, \alpha_m). \end{aligned} \tag{2}$$

Interpretiert man nun p als Element in $R[\alpha_1, \dots, \alpha_m][X] \subseteq L[X]$ so entspricht p offensichtlich f und somit sind nach einem Koeffizientenvergleich in (2) alle Koeffizient von f der Bauart $(-1)^k s_k(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ mit $k \in \{0, \dots, m\}$. In anderen Worten entsprechen die Koeffizienten von f bis auf Vorzeichen elementarsymmetrischen Polynomen von $R[X_1, \dots, X_m]$ in den Nullstellen $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in L$. □

(c) Durch geschicktes Raten können zunächst die beiden Nullstellen 1 und -1 identifiziert werde, d.h. $f(X) = (X-1)(X+1)g(X)$ für ein geeignetes $g \in \mathbb{Z}[X]$. Man ermittelt nun (z.B. durch Polynomdivision) $g(X) := X^2 + 2X - 15 \in \mathbb{Z}[X]$ mit den Nullstellen -5 und 3 (z.B. durch die p-q-Formel oder geschicktes Raten). Bemerke, dass f somit schon vollständig über $\mathbb{Z}$ zerfällt und setze demnach $R := \mathbb{Z}$, $K := \mathbb{Q} =: L$ und $\alpha_1 := 1$, $\alpha_2 := (-1)$, $\alpha_3 := 3$, $\alpha_4 := (-5) \in L$, $\deg(f) = m = 4$ im Kontext der Aufgabenstellung. Bezeichne nun a_{4-k} den Koeffizienten des Monoms X^k in f mit $k \in \{0, \dots, 4\}$, dann erkennt man die folgende Situation:

k	a_{4-k}	$(-1)^k s_k(1, -1, 3, -5)$	Übereinstimmung?
0	1	1	Ja
1	2	$(-1)(1 - 1 + 3 - 5) = 2$	Ja
2	-16	$(-1 + 3 - 5 - 3 + 5 - 15 = (-16)$	Ja
3	-2	$(-1)(-3 + 5 - 15 + 15) = (-2)$	Ja
4	15	15	Ja

Dies spiegelt die allgemeine in Teilaufgabe (b) bewiesene Aussage und ihren Wahrheitsgehalt wieder.