Prof. Dr. Salma Kuhlmann
Laura Wirth

Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Sommersemester 2025

Übungen zur Vorlesung *Algebra II*
Blatt 6

Allgemeiner Hinweis: Alle Aussagen sind stets zu beweisen. Blatt 6 ist das letzte reguläre Übungsblatt zur Vorlesung *Algebra II*.

Aufgabe 6.1. (1+2+1 Punkte)

Sei R ein Integritätsbereich und sei S eine multiplikative Teilmenge von R mit $0 \notin S$. Durch die Einbettung $i\colon r \mapsto \frac{r}{1}$ identifizieren wir R mit einem Teilring von $S^{-1}R$. Für jedes Ideal I von R bezeichnet $S^{-1}RI$ das von I erzeugte Ideal in $S^{-1}R$.

(i) Zeigen Sie, dass jedes Ideal in $S^{-1}R$ von der Form $S^{-1}RI$ ist, wobei I ein Ideal von R ist.

(ii) Zeigen Sie, dass für jedes Primideal $P \triangleleft R$ mit $P \cap S = \emptyset$ das Ideal $S^{-1}RP$ ein Primideal von $S^{-1}R$ ist.

(iii) Zeigen Sie, dass jedes Primideal von $S^{-1}R$ von der Form $S^{-1}RP$ ist, wobei P ein Primideal von R mit $P \cap S = \emptyset$ ist.

Aufgabe 6.2 (1+1+1+1 Punkte)

Sei R ein Integritätsbereich und sei S eine multiplikative Teilmenge von R mit $0 \notin S$.

(a) Zeigen Sie, dass R genau dann lokal ist, wenn $R \backslash R^\times$ ein Ideal von R ist.

(b) Zeigen Sie, dass falls R ein noetherscher Integritätsbereich ist, dann auch $S^{-1}R$ noethersch ist.

(c) Zeigen Sie, dass falls R ein Dedekindring ist, dann auch $S^{-1}R$ ein Dedekindring ist.

(d) Erarbeiten Sie ein Beispiel für einen faktoriellen Ring, der kein Dedekindring ist.

Notation.

Sei ∞ ein gegenüber $\mathbb{Z}$ neues Element mit $n + \infty := \infty =: \infty + n$ für alle $n \in \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$.

Definition.
Sei K ein Körper.

(1) Eine surjektive Abbildung $v\colon K \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ ist eine *diskrete Bewertung*, falls für alle $a, b \in K$ die Bedingungen

  (i) $v(ab) = v(a) + v(b)$,

  (ii) $v(a) = \infty \Leftrightarrow a = 0$ und

  (iii) $v(a+b) \geq \min\{v(a), v(b)\}$

  erfüllt sind.

(2) Für eine diskrete Bewertung v ist der Unterring $R_v := \{a \in K \mid v(a) \geq 0\}$ von K der zugehörige *diskrete Bewertungsring*.

Aufgabe 6.3. (1+1+1+1 Punkte)
Sei K ein Körper, sei $v\colon K \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ eine diskrete Bewertung, sei R_v der zugehörige Bewertungsring, sei $r \in R_v \setminus \{0\}$ und sei $t \in R_v$ mit $v(t) = 1$.

(a) Zeigen Sie, dass r genau dann eine Einheit in R_v ist, wenn $v(r) = 0$ gilt.

(b) Beweisen Sie die Existenz geeigneter $n \in \mathbb{N}_0$ und $u \in R_v^\times$ mit $r = ut^n$.

(c) Zeigen Sie, dass R_v ein ganz abgeschlossener Hauptidealbereich ist.

(d) Beweisen Sie die Existenz eines eindeutigen nicht-trivialen Primideals von R_v.

Zusatzaufgabe für Interessierte (ohne Abgabe)
Sei R ein noetherscher lokaler Integritätsbereich mit einem eindeutigen maximalen Ideal $\mathfrak{m} = \langle t \rangle$ für ein geeignetes $t \in R$.

(a) Zeigen Sie, dass R ein Hauptidealbereich ist.

(b) Beweisen Sie die Existenz eines eindeutigen nicht-trivialen Primideals von R.

Sei nun ferner $K := \mathrm{Quot}(R)$ der Quotientenkörper von R und $k \in K^\times$.

(c) Beweisen Sie die Existenz eines eindeutigen $n \in \mathbb{Z}$ und eines eindeutigen $u \in R^\times$ mit $k = ut^n$.

(d) Zeigen Sie, dass R ein diskreter Bewertungsring ist.

Abgabe: Dienstag, den 27. Mai 2025, um 10:00 Uhr in den Briefkasten Nr. 17. Achten Sie auf eine saubere und lesbare Darstellung und heften Sie Ihre einzelnen Blätter zusammen.