

Übungen zur Vorlesung Algebra II
Blatt 6 – Musterlösung

Allgemeiner Hinweis: Alle Aussagen sind stets zu beweisen.

Aufgabe 6.3.

Sei K ein Körper, sei $v: K \rightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ eine diskrete Bewertung, sei R_v der zugehörige Bewertungsring, sei $r \in R_v \setminus \{0\}$ und sei $t \in R_v$ mit $v(t) = 1$.

- (a) Zeigen Sie, dass r genau dann eine Einheit in R_v ist, wenn $v(r) = 0$ gilt.
- (b) Beweisen Sie die Existenz geeigneter $n \in \mathbb{N}_0$ und $u \in R_v^\times$ mit $r = ut^n$.
- (c) Zeigen Sie, dass R_v ein ganz abgeschlossener Hauptidealbereich ist.
- (d) Beweisen Sie die Existenz eines eindeutigen nicht-trivialen Primideals von R_v .

Lösung:

- (a) Man bemerke zunächst allgemein, dass aus $v(1) = v(1 \cdot 1) = v(1) + v(1)$ über \mathbb{Z} unmittelbar $v(1) = 0$ für sämtliche diskrete Bewertungen folgt.

(\Rightarrow)

Sei $r \in R_v^\times$ gegeben, dann liegt somit $r^{-1} \in K$ ebenfalls in R_v , d.h. $v(r^{-1}) \geq 0$ ist erfüllt. Ferner gilt $0 = v(1) = v(rr^{-1}) = \underbrace{v(r)}_{\geq 0} + \underbrace{v(r^{-1})}_{\geq 0}$ und damit insbesondere $v(r) = 0$.

(\Leftarrow)

Sei $r \in R_v$ mit $v(r) = 0$ gegeben, dann impliziert dies zum einen $r \neq 0$ und zum anderen auch $0 = v(1) = v(rr^{-1}) = \underbrace{v(r)}_{=0} + v(r^{-1}) = v(r^{-1})$, wobei $r^{-1} \in K$ stets existiert. Per

Definition eines diskreten Bewertungsringes liegt r^{-1} somit insbesondere in R_v und es folgt $r \in R_v^\times$. □

- (b) Nach Voraussetzung gilt $r \in R_v \setminus \{0\}$ und per Definition eines diskreten Bewertungsringes folgt somit $v(r) =: n \in \mathbb{N}_0$. Darüber hinaus gilt $v(r) = n = n \cdot 1 = nv(t) = v(t^n)$. Betrachte nun $u := t^{-n}r \in K$ und bemerke, dass dann bereits $r = ut^n$ mit $n \in \mathbb{N}_0$ erfüllt ist. Ferner folgt aus der eben getätigten Berechnung $v(u) = v(t^{-n}r) = -nv(t) + v(r) = 0$. Somit ist $u \in R_v^\times$ nach Aufgabenteil (a) erfüllt. □

(c) Behauptung. R_v ist ein Hauptidealbereich.

Beweis der Behauptung. Sei I ein beliebig aber festes nicht-triviales echtes Ideal von R_v , sowie $i \in I \setminus \{0\}$ beliebig aber fest, dann existiert nach Aufgabenteil (b) ein geeignetes $n \in \mathbb{N}$ ($n \neq 0$, da i keine Einheit nach Wahl von I (echt) sein kann) und $u \in R_v^\times$ mit $i = ut^n$. Somit liegt ut^n in dem Ideal I und unter Ausnutzung der Idealeigenschaft von I und $u \in R_v^\times$ folgt ferner $t^n = \underbrace{(u^{-1}u)}_{=1} t^n = \underbrace{u^{-1}}_{\in R_v} \underbrace{(ut^n)}_{\in I} \in I$.

Sei nun $m \in \mathbb{N}$ minimal gewählt sodass $t^m \in I$ erfüllt ist, dann impliziert dies unmittelbar $\langle t^m \rangle \subseteq I$. Sei ferner $j \in I \setminus \{0\}$ beliebig aber fest, dann ist j keine Einheit von R_v , da I ein echtes Ideal ist, und folglich existiert nach Aufgabenteil (b) ein $s \in \mathbb{N}$ und $v \in R_v^\times$ mit $j = vt^s$. Folgt man obiger Argumentation, so ergibt sich hieraus wiederum $t^s \in I$ und, da $m \in \mathbb{N}$ minimal mit der Eigenschaft $t^m \in I$ gewählt war, impliziert dies $m \leq s$. Somit teilt t^m bereits $vt^s = j$, sodass $j \in \langle t^m \rangle$ gefolgert werden kann. Da $j \in I \setminus \{0\}$ beliebig gewählt war, impliziert dies nun $I \subseteq \langle t^m \rangle$.

Insgesamt ist $I = \langle t^m \rangle$ somit ein Hauptideal und da I beliebig gewählt war, ist R_v folglich ein Hauptidealbereich. \square

Gemäß Beispiel 10.2 (i) ist jeder Hauptidealbereich ein Dedekindring und nach Satz 13.1 somit auch ganz abgeschlossen. Dies gilt insbesondere für den Hauptidealbereich R_v . \square

(d) Für den Beweis der Existenz eines nicht-trivialen Primideals von R_v bemerke zunächst, dass $t \in R_v$ nach Voraussetzung gilt. Ferner gilt gemäß der Definition einer diskreten Bewertung und Aufgabenteil (a) insbesondere $0 \neq t \in R_v \setminus R_v^\times$. Somit ist $\langle t \rangle$ ein nicht-triviales echtes Ideal von R_v . Nun existiert nach der B3 jedoch bereits ein maximales Ideal \mathfrak{m} von R_v mit $\langle t \rangle \subseteq \mathfrak{m}$, d.h. \mathfrak{m} ist insbesondere nicht-trivial. Darüber hinaus sind maximale Ideale ebenfalls nach der B3 Primideale. Insgesamt existiert somit mindestens ein nicht-triviales Primideal von R_v , nämlich \mathfrak{m} .

Sei nun noch für den Eindeutigkeitsbeweis \mathfrak{p} ein beliebig aber festes nicht-triviales Primideal von R_v , dann wurde im Beweis des Aufgabenteils (c) bereits gezeigt, dass \mathfrak{p} von der Form $\langle t^m \rangle$ für ein geeignetes $m \in \mathbb{N}$ ist. Damit liegt insbesondere $t^m \in \langle t^m \rangle = \mathfrak{p}$ und aufgrund der Primeigenschaft von \mathfrak{p} somit auch $t \in \mathfrak{p}$. Es folgt $\langle t \rangle \subseteq \mathfrak{p}$. Offensichtlich gilt jedoch auch $\mathfrak{p} = \langle t^m \rangle \subseteq \langle t \rangle$ und damit insgesamt $\langle t \rangle = \mathfrak{p}$. Das eindeutige nicht-triviale Primideal von R_v ist somit $\langle t \rangle$. \square

Zusatzaufgabe für Interessierte

Sei R ein noetherscher lokaler Integritätsbereich mit einem eindeutigen maximalen Ideal $\mathfrak{m} = \langle t \rangle$ für ein geeignetes $t \in R$.

- (a) Zeigen Sie, dass R ein Hauptidealbereich ist.
- (b) Beweisen Sie die Existenz eines eindeutigen nicht-trivialen Primideals von R .

Sei nun ferner $K := \text{Quot}(R)$ der Quotientenkörper von R und $k \in K^\times$.

- (c) Beweisen Sie die Existenz eines eindeutigen $n \in \mathbb{Z}$ und eines eindeutigen $u \in R^\times$ mit $k = ut^n$.
- (d) Zeigen Sie, dass R ein diskreter Bewertungsring ist.

Lösung:

- (a) Bemerkte zunächst $\langle t \rangle = \mathfrak{m} = R \setminus R^\times$ gemäß Aufgabe 6.2 (a), da R nach Voraussetzung lokal ist.

Sei nun I ein beliebiges aber festes nicht-triviales echtes Ideal von R und $i \in I \setminus \{0\}$ beliebig aber fest. Dann existiert ein geeignetes $u \in R^\times$ und $n \in \mathbb{N}$ mit $i = ut^n$ aufgrund von $I \subseteq \mathfrak{m} = \langle t \rangle = R \setminus R^\times$ (\mathfrak{m} ist das eindeutige maximale Ideal von R). Verwendet man nun noch die Idealeigenschaft von I so folgt $t^n = \underbrace{(u^{-1}u)}_{=1} t^n = \underbrace{u^{-1}}_{\in R} \underbrace{(ut^n)}_{\in I} \in I$.

Sei von nun an $m \in \mathbb{N}$ minimal bezüglich der Eigenschaft $t^m \in I$ gewählt und betrachte ein beliebiges aber festes $j = vt^s \in I \setminus \{0\}$ mit geeignetem $s \in \mathbb{N}$ und $v \in R^\times$ (analog zu obiger Argumentation). Hieraus folgt erneut $t^s \in I$ (ebenfalls analog zu obiger Argumentation) und da m minimal mit $t^m \in I$ gewählt ist auch $m \leq s$. Dies impliziert wiederum $j = vt^s \in \langle t^m \rangle$ und somit gilt insgesamt $I \subseteq \langle t^m \rangle$, da $j \in I \setminus \{0\}$ beliebig gewählt war. Offensichtlich gilt jedoch auch $\langle t^m \rangle \subseteq I$. Insgesamt ist I daher ein durch t^m erzeugtes Hauptideal und da I beliebig gewählt war, somit R ein Hauptidealbereich. \square

- (b) Die Existenz eines nicht-trivialen Primideals ist klar.

Sei für den Beweis der Eindeutigkeit daher \mathfrak{p} ein beliebig aber festes nicht-triviales Primideal von R . Da R nach Aufgabenteil (a) ein Hauptidealbereich ist, existiert folglich ein irreduzibles $p \in R$ mit $\langle p \rangle = \mathfrak{p}$. Ferner gilt auch $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{m}$, sodass insgesamt $\langle p \rangle = \mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{m} = \langle t \rangle$ geschlussfolgert werden kann. Somit existiert ein geeignetes $u \in R$ mit $p = ut$. Da p jedoch irreduzibel ist, folgt hieraus $u \in R^\times$ oder $t \in R^\times$. Da t jedoch das maximale Ideal $\mathfrak{m} = R \setminus R^\times$ (vgl. Aufgabe 6.2 (a)) erzeugt, gilt somit unweigerlich $t \notin R^\times$ und damit wiederum $u \in R^\times$. Folglich sind p und t assoziiert und es folgt $\mathfrak{p} = \langle p \rangle = \langle t \rangle = \mathfrak{m}$.

Das eindeutige nicht-triviale Primideal von R entspricht somit dem eindeutigen maximalen Ideal \mathfrak{m} von R . \square

- (c) Es wird zunächst die Existenzaussage bewiesen. Betrachte hierfür in einem ersten Schritt den Fall $k \in R \setminus \{0\}$. Falls k darüber hinaus in R^\times liegt, dann gilt offensichtlich $k = t^0 k$. Falls k hingegen in $\mathfrak{m} = R \setminus R^\times$ liegt, dann gilt bereits $k = ut^n$ für ein geeignetes $n \in \mathbb{N}$ und $u \in R^\times$ (vgl. Beweis des Aufgabenteils (a)). Damit wurde die Situation für ein $k \in R \setminus \{0\}$ bereits vollständig geklärt.

Betrachte daher nun den allgemeinen Fall, dass k von der Gestalt $k = \frac{x}{y}$ mit geeigneten $x, y \in R \setminus \{0\}$ ist. Dann existieren nach den eben getätigten Beobachtungen folglich geeignete $n, m \in \mathbb{N}_0$, $u, v \in R^\times$ mit $x = ut^n$ und $y = vt^m$. Dies impliziert wiederum $k = \frac{x}{y} = \frac{ut^n}{vt^m} = \frac{u}{v} t^{n-m}$. Somit ist k von der gewünschten Gestalt, da $n - m$ offensichtlich eine ganze Zahl ist und $\frac{u}{v} = uv^{-1}$ als Produkt zweier invertierbarer Elemente aus R^\times ebenfalls in R^\times liegt.

Für den Eindeutigkeitsbeweis seien nun noch $n, m \in \mathbb{Z}$ und $u, v \in R^\times$ der Art, dass $ut^n = vt^m$ gilt. O.B.d.A. sei $n \leq m$, dann impliziert $1 = \frac{ut^n}{vt^m} = \frac{u}{v} \underbrace{t^{n-m}}_{\in R}$, dass der

Erzeuger t des maximalen Ideal \mathfrak{m} eine Einheit in R ist oder aber $n - m = 0$ gilt. Da der erste Fall nicht zutrifft (denn $\mathfrak{m} = R \setminus R^\times$ nach Aufgabe 6.2 (a)), folgt hieraus $n - m = 0$ bzw. $n = m$ und damit auch $1 = \frac{u}{v} t^{n-m} = \frac{u}{v} t^0 = \frac{u}{v}$ bzw. $u = v$. \square

- (d) Betrachte die Abbildung

$$v: K \rightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$$

$$k \mapsto \begin{cases} n_k, & \text{falls } k \neq 0 \\ \infty, & \text{falls } k = 0 \end{cases}$$

wobei für $0 \neq k$ mit n_k die (eindeutige) ganze Zahl bezeichnet wird für die $k = ut^{n_k}$ mit geeignetem $u \in R^\times$ gilt. Die eindeutige Existenz dieser folgt aus Aufgabenteil (c) (Wohldefiniertheit).

(Surjektivität) Offensichtlich ist v surjektiv, denn für jedes $n \in \mathbb{Z}$ gilt $v(t^n) = n$ und $v(0) = \infty$ per Definition.

(Eigenschaft (i)) Seien $n, m \in \mathbb{Z}$ und $u, v \in R^\times$ beliebig aber fest, dann gilt

$$v((ut^n)(wt^m)) = v((uw)t^{n+m}) = n + m = v(ut^n) + v(wt^m).$$

(Eigenschaft (ii)) Ferner gilt für beliebig aber festes $a \in K$ genau dann $v(a) = 0$, wenn $a = 0$ erfüllt ist (per Definition von v).

(Eigenschaft (iii)) Seien $n, m \in \mathbb{Z}$ mit $n \leq m$ und $u, v \in R^\times$ beliebig aber fest, dann gilt

$$v(ut^n + wt^m) = v(ut^n(1 + u^{-1}wt^{m-n})) = v(ut^n) + v(\underbrace{1 + u^{-1}wt^{m-n}}_{=:k}) = n + v(k).$$

Falls $k = 0$ gilt, dann folgt hieraus unmittelbar

$$v(ut^n + wt^m) = n + v(k) = n + v(0) = n + \infty = \infty \geq \min\{v(ut^n), v(wt^m)\}.$$

Sei daher o.B.d.A. $k \in K^\times$, dann existiert nach Aufgabenteil (c) ein (eindeutiges) geeignetes $l \in \mathbb{Z}$ und ein (eindeutiges) geeignetes $x \in R^\times$ mit $1 + u^{-1}wt^{m-n} = k = xt^l$. Dies impliziert wiederum $1 = xt^l - u^{-1}wt^{m-n} \in R$. Setze $l_0 := \min\{l, m - n\}$, dann gilt somit ferner schon $1 = \underbrace{t^{l_0}}_{\in R} \underbrace{(xt^{l-l_0} - u^{-1}wt^{m-n-l_0})}_{\in R}$. Folglich ist t^{l_0} , und damit auch insbesondere t , eine Einheit in R oder $l_0 = 0$. Da der erste Fall aber nicht zutrifft ($\mathfrak{m} = \langle t \rangle$ ist ein echtes Ideal von R nach Voraussetzung), muss $0 = l_0 = \min\{l, m - n\} \leq l$ gelten. Hieraus ist insgesamt, wie gefordert,

$$\begin{aligned} v(ut^n + wt^m) &= n + v(k) = n + v(xt^l) = n + \underbrace{l}_{\geq 0} \\ &\geq n \stackrel{n \leq m}{=} \min\{n, m\} = \min\{v(ut^n), v(wt^m)\} \end{aligned}$$

ersichtlich.

Zusammenfassend definiert v folglich eine diskrete Bewertung über K .

Behauptung. $R_v = R$

Beweis der Behauptung.

(\subseteq) Sei $a \in R_v$ beliebig aber fest, dann gilt gemäß der Definition des diskreten Bewertungsringes R_v und der Definition von v bereits $0 \leq v(a) = n_a$ bzw. $n_a \in \mathbb{N}_0$. Folglich existiert nach Aufgabenteil (c) ein $u \in R^\times$ mit $a = ut^{n_a}$. Da t nach Voraussetzung ein Element von R ist und $n_a \in \mathbb{N}_0$ gilt, ist a somit als Produkt zweier Elemente aus R , nämlich $u, t^{n_a} \in R$, selbst ein Element in R .

(\supseteq) Sei $a \in R$ beliebig aber fest, dann existiert nach dem Beweis des Aufgabenteils (c) insbesondere ein eindeutiges $n_a \in \mathbb{N}_0$ und $u \in R^\times$ mit $a = ut^{n_a}$. Dies impliziert wiederum $v(a) = n_a \in \mathbb{N}_0$ bzw. $v(a) \geq 0$ gemäß der Definition von v . Per Definition eines diskreten Bewertungsringes liegt a somit in R_v . \square

Insgesamt kann R somit als der diskrete Bewertungsring der diskreten Abbildung v über K aufgefasst werden. \square