Prof. Dr. Salma Kuhlmann
Laura Wirth

Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Sommersemester 2025

Übungen zur Vorlesung *Algebraische Zahlentheorie*
Blatt 1

Allgemeiner Hinweis: Alle Aussagen sind stets zu beweisen.

Aufgabe 1.1. (1+1+2 Punkte)

(a) Sei K ein Körper, sei $n \in \mathbb{N}$, sei A eine $n \times n$-Matrix mit Einträgen aus K und betrachten Sie das charakteristische Polynom

$$\mathrm{CharPol}(A) = \det(xI_n - A) = x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_0 \in K[x]$$

von A. Beweisen Sie die folgenden Beziehungen:

(i) $b_0 = (-1)^n \det(A)$

(ii) $b_{n-1} = -\mathrm{Spur}(A)$.

(b) Sei L/K eine endliche Körpererweiterung. Zeigen Sie, dass

$$\begin{array}{rcl} B_{L/K}\colon L \times L & \to & K \\ (x,y) & \mapsto & \mathrm{Sp}_{L/K}(xy) \end{array}$$

eine symmetrische Bilinearform ist.

Aufgabe 1.2. (1+1+1+1+1 Punkte)

Sei L/K eine endliche Körpererweiterung, seien $\alpha, \beta \in L$, sei $\lambda \in K$ und sei $n = [L : K]$. Zeigen Sie:

(a) $\mu_{\alpha\beta,L} = \mu_{\alpha,L} \circ \mu_{\beta,L}$.

(b) $\mu_{\lambda\alpha+\beta,L} = \lambda\mu_{\alpha,L} + \mu_{\beta,L}$.

(c) $Sp_{L/K}(\lambda\alpha + \beta) = \lambda Sp_{L/K}(\alpha) + Sp_{L/K}(\beta)$.

(d) $\mu_{\lambda,L} = \lambda \mathrm{Id}_L$.

Sei nun $f_{\alpha,L} = x^\nu + a_{\nu-1}x^{\nu-1} + \cdots + a_0$ mit $a_i \in K$ für $i \in \{0, \ldots, \nu-1\}$. Bemerke, dass $\nu = [K(\alpha) : K] = \deg \mathrm{MinPol}_K(\alpha)$ und somit $\mu := [L : K(\alpha)] = \frac{n}{\mu}$. Zeigen Sie:

(e) Der Koeffizient von x^{n-1} (das heißt der Koeffizient von $x^{\nu\mu-1}$) in $(f_\alpha)^\mu$ ist $\mu a_{\nu-1}$.

Abgabe: Dienstag, den 10. Juni 2025, um 10:00 Uhr in den Briefkasten Nr. 17. Achten Sie auf eine saubere und lesbare Darstellung und heften Sie Ihre einzelnen Blätter zusammen.