Prof. Dr. Salma Kuhlmann
Laura Wirth

Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Sommersemester 2025

---

**Übungen zur Vorlesung *Algebraische Zahlentheorie***
**Blatt 2**

**Allgemeiner Hinweis:** Alle Aussagen sind stets zu beweisen.

**Aufgabe 2.1.** (1+1+1+1 Punkte)

Sei $K$ ein Körper, sei $n \in \mathbb{N}$, sei $V$ ein $n$-dimensionaler $K$-Vektorraum, sei $B\colon V \times V \to K$ eine symmetrische Bilinearform und betrachte für beliebiges aber festes $x \in V$ die Linearform

$$\begin{array}{rcl} B_x\colon V & \to & K \\ y & \mapsto & B_x(y) := B(x,y). \end{array}$$

Die Bilinearform $B$ ist *nicht-ausgeartet*, falls für alle $x \in V\backslash\{0\}$ stets $B_x \not\equiv 0$ gilt. Ist dies nicht der Fall, so ist $B$ *ausgeartet*.

(a) Zeigen Sie, dass $B$ genau dann nicht-ausgeartet ist, wenn für alle Matrix-Darstellungen $\mathbb{B}$ von $B$ bereits $\det(\mathbb{B}) \neq 0$ gilt.

Betrachten Sie nun die lineare Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \varphi_B\colon V & \to & V^* \\ x & \mapsto & B_x. \end{array}$$

(b) Beweisen Sie, dass $B$ genau dann nicht-ausgeartet ist, wenn $\ker(\varphi_B) = \{0\}$ erfüllt ist und folgern Sie, dass $B$ genau dann nicht-ausgeartet ist, wenn $\varphi_B$ ein Isomorphismus ist.

Sei $B$ von nun an nicht-ausgeartet, sei $\mathcal{B} := \{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis von $V$ und setze $w_j := \varphi_B^{-1}(v_j^*) \in V$ für alle $j \in \{1, \dots, n\}$. Bemerken Sie, dass $\{w_1, \dots, w_n\}$ eine Basis von $V$ ist. Diese wird auch die zu $\mathcal{B}$ *$B$-duale Basis* genannt.

(c) Beweisen Sie für alle $i, j \in \{1, \dots, n\}$ die Kronecker-Delta-Beziehung $B(v_i, w_j) = \delta_{ij}$.

(d) Zeigen Sie, dass die zu $\mathcal{B}$ $B$-duale Basis für alle $v \in V$ mit $v = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i v_i$ und $c_1, \dots, c_n \in K$, und alle $j \in \{1, \dots, n\}$ bereits $c_j = B(v, w_j)$ erfüllt.

**Aufgabe 2.2.** (4 Punkte)

Sei $L/K$ eine separable Körpererweiterung des Grades $n := [L : K] \in \mathbb{N}$, sei $\alpha \in L$ und sei $K \subseteq E \subseteq L$ eine Zwischenkörpererweiterung. Zeigen Sie $\mathrm{Sp}_{L/K}(\alpha) = \mathrm{Sp}_{E/K}\left(\mathrm{Sp}_{L/E}(\alpha)\right)$.

**Aufgabe 2.3.** (2+2 Punkte)

Sei $L/K$ eine endliche separable Körpererweiterung des Grades $n := [L : K] \in \mathbb{N}$, sei $\Omega$ die normale Hülle von $L/K$, seien $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ die paarweise verschiedenen $K$-Einbettungen von $L$ in $\Omega$, sei $\{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis von $L/K$, sei $\mathbb{B}$ bezüglich dieser Basis eine Matrixdarstellung von $B_{L/K}$ und sei $\mathcal{V} := (\mathcal{V}_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ definiert durch $\mathcal{V}_{ij} := \sigma_i(v_j)$ für $i, j \in \{1, \dots, n\}$.

(a) Beweisen Sie $\det(\mathbb{B}) = (\det \mathcal{V})^2$.

(b) Folgern Sie, dass $B_{L/K}$ nicht-ausgeartet ist.

**Zusatzaufgabe für Interessierte.** (ohne Abgabe)

(a) Bestimmen Sie die folgenden Normen:

(i) $\mathrm{N}_{\mathbb{Q}(\sqrt{3})/\mathbb{Q}}\left(\sqrt{3}\right)$

(ii) $\mathrm{N}_{\mathbb{Q}(\sqrt[4]{3})/\mathbb{Q}}\left(\sqrt{3}\right)$

(b) Bestimmen Sie die folgenden Spuren:

(i) $\mathrm{Sp}_{\mathbb{Q}(\sqrt{3})/\mathbb{Q}}\left(\sqrt{3}\right)$

(ii) $\mathrm{Sp}_{\mathbb{Q}(\sqrt[4]{3})/\mathbb{Q}}\left(\sqrt{3}\right)$

**Abgabe:** Dienstag, den 24. Juni 2025, um 10:00 Uhr in den Briefkasten Nr. 17. Achten Sie auf eine saubere und lesbare Darstellung und heften Sie Ihre einzelnen Blätter zusammen.