Prof. Dr. Salma Kuhlmann
Laura Wirth

Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Sommersemester 2025

Übungen zur Vorlesung *Algebraische Zahlentheorie*
Blatt 3

Allgemeiner Hinweis: Alle Aussagen sind stets zu beweisen.

Aufgabe 3.1. (1+2+1 Punkte)

Sei γ eine Nullstelle des irreduziblen Polynoms $f(x) := x^3 - x - 1 \in \mathbb{Q}[x]$ in einer geeigneten Körpererweiterung von $\mathbb{Q}$.

(a) Bestimmen Sie die $\mathbb{Q}(\gamma)/\mathbb{Q}$-Spuren von 1 und γ.

(b) Bestimmen Sie mit Hilfe der Matrixdarstellung der Multiplikation mit γ^2 bezüglich der Basis $\{1, \gamma, \gamma^2\}$ die $\mathbb{Q}(\gamma)/\mathbb{Q}$-Spur von γ^2.

(c) Ermitteln Sie für beliebige aber feste $a, b, c \in \mathbb{Q}$ die $\mathbb{Q}(\gamma)/\mathbb{Q}$-Spur von $a + b\gamma + c\gamma^2$.

Aufgabe 3.2. (0,5+1+2,5 Punkte)

Sei R ein ganz abgeschlossener Integritätsbereich, sei $K := \mathrm{Quot}(R)$ der Quotientenkörper von R, sei L/K eine endliche separable Körperweiterung des Grades $n := [L : K] \in \mathbb{N}$, sei $S := \overline{R}^L$ der ganze Abschluss von R in L und sei $\{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq S$ eine Basis von L/K. Betrachten Sie die Mengen

$$M := \sum_{i=1}^{n} Rv_i \text{ und } M' := \left\{\alpha \in L \mid \forall \gamma \in M \colon \mathrm{Sp}_{L/K}(\alpha\gamma) \in R\right\}.$$

(a) Beweisen Sie, dass M ein freies R-Moduln der Dimension n ist.

(b) Beweisen Sie, dass M' ein R-Modul ist.

(c) Zeigen Sie $M \subseteq S \subseteq M'$.

Aufgabe 3.3. (3+1 Punkte)

Sei L ein Zahlkörper über $\mathbb{Q}$ des Grades $n := [L : \mathbb{Q}] \in \mathbb{N}$ und $\mathcal{B} := \{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq \mathcal{O}_L$ eine $\mathbb{Q}$-Basis von $L/\mathbb{Q}$.

(a) Beweisen Sie, dass wenn der Absolutbetrag $|D(v_1, \ldots, v_n)| \in \mathbb{N}$ der Diskriminante von $\mathcal{B}$ minimal über alle Basen von $L/\mathbb{Q}$ ist, $\mathcal{B}$ eine Ganzheitsbasis von $\mathcal{O}_L$ über $\mathbb{Z}$ ist.

(b) Folgern Sie einen Algorithmus zur Ermittlung einer Ganzheitsbasis von $\mathcal{O}_L$ über $\mathbb{Z}$.

Zusatzaufgabe für Interessierte. (ohne Abgabe)

Sei $f(x) := x^3 + ax^2 + bx + c \in \mathbb{Q}[x]$ ein allgemeines irreduzibles Polynom des Grades 3 mit Koeffizienten $a, b, c \in \mathbb{Q}$.

(a) Betrachten Sie das Polynom $g(x) := f\left(x - \frac{a}{3}\right) \in \mathbb{Q}[x]$.

(i) Bestimmen Sie g.

(ii) Benennen Sie den Zusammenhang zwischen dem Zerfällungskörper von f und dem Zerfällungskörper von g. Beweisen Sie Ihre Behauptung.

(iii) Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Diskriminante von f und der Diskriminante von g? Begründen Sie Ihre Antwort.

(b) Seien nun α, β, γ alle Nullstellen von g in einem Zerfällungskörper von g. Beweisen Sie

$$D(g) = -g'(\alpha)g'(\beta)g'(\gamma).$$

(c) Drücken Sie die Diskriminante $D(g)$ in Abhängigkeit der Koeffizienten von g aus.

(d) Folgern Sie einen Ausdruck für die Diskriminante $D(f)$ in Abhängigkeit der Koeffizienten a, b, c von f.

Abgabe: Dienstag, den 1. Juli 2025, um 10:00 Uhr in den Briefkasten Nr. 17. Achten Sie auf eine saubere und lesbare Darstellung und heften Sie Ihre einzelnen Blätter zusammen.