Prof. Dr. Salma Kuhlmann
Laura Wirth

Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Sommersemester 2025

Übungen zur Vorlesung *Algebraische Zahlentheorie*
Blatt 4

Allgemeiner Hinweis: Alle Aussagen sind stets zu beweisen.

Aufgabe 4.1. (0,5+1+0,5+2 Punkte)

Sei $R := \mathbb{Z}$, sei $\alpha \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von $f \in \mathbb{Q}[x]$ und sei $L := \mathbb{Q}(\alpha)$.

(a) Betrachten Sie das Polynom $f(x) := x^3 + 2x + 1$.

  (i) Beweisen Sie, dass $f(x)$ irreduzibel über $\mathbb{Q}$ ist.

  (ii) Zeigen Sie, dass $\{1, \alpha, \alpha^2\}$ eine Ganzheitsbasis von $\mathcal{O}_L$ über $\mathbb{Z}$ ist.

(b) Betrachten Sie das Polynom $f(x) := x^3 + x + 4$.

  (i) Beweisen Sie, dass $f(x)$ irreduzibel über $\mathbb{Q}$ ist.

  (ii) Zeigen Sie, dass $\{1, \alpha, \alpha^2\}$ eine Ganzheitsbasis von $\mathcal{O}_L$ über $\mathbb{Z}$ ist.

Aufgabe 4.2. (0,2+1+2+0,5 Punkte)

Sei $R := \mathbb{Z}$, sei $\alpha \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von $f(x) := x^3 - x^2 - 2x - 8 \in \mathbb{Q}[x]$, sei $L := \mathbb{Q}(\alpha)$ und sei $\beta := \frac{\alpha+\alpha^2}{2}$.

(a) Beweisen Sie, dass $f(x)$ irreduzibel über $\mathbb{Q}$ ist.

(b) Zeigen Sie $\beta^3 - 3\beta^2 - 10\beta - 8 = 0$.

(c) Bestimmen Sie $D(1, \alpha, \beta)$.

(d) Folgern Sie, dass $\{1, \alpha, \beta\}$ eine Ganzheitsbasis von $\mathcal{O}_L$ über $\mathbb{Z}$ ist.

Aufgabe 4.3. (3+1 Punkte)

Sei $R := \mathbb{Z}$, sei $\alpha \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von $f(x) := x^3 - x^2 - 2x - 8 \in \mathbb{Q}[x]$, sei $L := \mathbb{Q}(\alpha)$ und sei $\gamma \in \mathcal{O}_L$.

(a) Beweisen Sie, dass $D(1, \gamma, \gamma^2)$ gerade ist.

(b) Folgern Sie, dass $\{1, \gamma, \gamma^2\}$ keine Ganzheitsbasis von $\mathcal{O}_L$ über $\mathbb{Z}$ ist.

Zusatzaufgabe für Interessierte. (2+2 Punkte)

Sei $f(x) := x^n + ax + b \in \mathbb{Q}[x]$ mit $a, b \in \mathbb{Q}$, $n \in \mathbb{N}$ ein irreduzibles, sei $\alpha \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von $f(x)$, sei $L := \mathbb{Q}(\alpha)$, sei $y = \frac{-nb}{x+(n-1)a} \in \mathbb{Q}(x)$ und betrachten Sie die rationale Funktion $f(y) = \frac{p(x)}{q(x)}$ für geeignete $p(x), q(x) \in \mathbb{Q}[x]$.

(a) Bestimmen Sie explizit das normierte Polynom $p(x)$ des Grades n und ermitteln Sie $p(0)$. Warum ist $p(x)$ eindeutig?

(b) Vollziehen Sie *Proposition/Beispiel* auf Seite 2 von Skript 20 anhand des Polynoms $f(x) := x^3+2x+1$ nach und vergleichen Sie Ihre Erkenntnis mit Ihrem Ergebnis aus Aufgabe 4.1(a).

Abgabe: Dienstag, den 8. Juli 2025, um 10:00 Uhr in den Briefkasten Nr. 17. Achten Sie auf eine saubere und lesbare Darstellung und heften Sie Ihre einzelnen Blätter zusammen.