
Übungen zur Vorlesung *Algebraische Zahlentheorie*
Blatt 5

Allgemeiner Hinweis: Alle Aussagen sind stets zu beweisen.

Aufgabe 5.1. (4 Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n$ ein vollständiges Gitter mit Basis $\mathcal{B} := \{v_1, \dots, v_n\}$ und fundamentalem Parallelotop T_Γ . Beweisen Sie

$$v(T_\Gamma) = \left| \det \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \right|.$$

Aufgabe 5.2. (1+2,5+0,5 Punkte)

Sei $\tau \in \mathbb{R}$, seien $s, t \in \mathbb{N}_0$ mit $(s, t) \neq (0, 0)$, setze

$$X(s, t, \tau) := \{(x_1, \dots, x_s, a_1, b_1, \dots, a_t, b_t) \in \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^{2t} \mid \sum_{i=1}^s |x_i| + 2 \sum_{j=1}^t |a_j^2 + b_j^2|^{\frac{1}{2}} \leq \tau\}$$

und

$$Y(s, t, \tau) := \{(x_1, \dots, x_s, a_1, b_1, \dots, a_t, b_t) \in \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^{2t} \mid x_1, \dots, x_s \geq 0\} \cap X(s, t, \tau).$$

- (a) Beweisen Sie durch Induktion nach s und der Verwendung des Satzes von Fubini, dass das Volumen von $Y(s, 0, \tau)$ durch

$$v(Y(s, 0, \tau)) = \frac{\tau^s}{s!}$$

gegeben ist.

- (b) Beweisen Sie durch Induktion nach t , der Verwendung des Satzes von Fubini und der Ausnutzung von Polarkoordinaten, dass das Volumen von $Y(s, t, \tau)$ durch

$$v(Y(s, t, \tau)) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^t \frac{\tau^{s+2t}}{(s+2t)!}$$

gegeben ist.

(c) Folgern Sie

$$v(X(s, t, \tau)) = 2^s \left(\frac{\pi}{2}\right)^t \frac{\tau^{s+2t}}{(s+2t)!}.$$

Aufgabe 5.3.

(4 Punkte)

Sei L ein Zahlkörper des Grades $n := [L : \mathbb{Q}] \in \mathbb{N}$, sei Ω die normale Hülle von $L/\mathbb{Q}$ und seien $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ die paarweise verschiedenen $\mathbb{Q}$ -Einbettungen von L in Ω , sodass die ersten s Einbettungen $\sigma_1, \dots, \sigma_s$ reell und die weiteren $2t$ Einbettungen $\sigma_{s+1}, \overline{\sigma_{s+1}}, \dots, \sigma_{s+t}, \overline{\sigma_{s+t}}$ komplex sind für geeignete Zahlen $s, t \in \mathbb{N}_0$ mit $n = s + 2t$. Sei ferner $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ eine $\mathbb{Q}$ -Basis von L und betrachten Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

mit

$$v_i := (\sigma_1(\alpha_i), \dots, \sigma_s(\alpha_i), \operatorname{Re}(\sigma_{s+1}(\alpha_i)), \operatorname{Im}(\sigma_{s+1}(\alpha_i)), \dots, \operatorname{Re}(\sigma_{s+t}(\alpha_i)), \operatorname{Im}(\sigma_{s+t}(\alpha_i))) \in \mathbb{R}^{s+2t}$$

für $i \in \{1, \dots, n\}$. Zeigen Sie, dass

$$\det(A) = \left(\frac{1}{2}i\right)^t \det(\mathcal{V})$$

mit

$$\mathcal{V} := \begin{pmatrix} \sigma_1(\alpha_1) & \cdots & \sigma_s(\alpha_1) & \sigma_{s+1}(\alpha_1) & \overline{\sigma_{s+1}(\alpha_1)} & \cdots & \sigma_{s+t}(\alpha_1) & \overline{\sigma_{s+t}(\alpha_1)} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \sigma_1(\alpha_n) & \cdots & \sigma_s(\alpha_n) & \sigma_{s+1}(\alpha_n) & \overline{\sigma_{s+1}(\alpha_n)} & \cdots & \sigma_{s+t}(\alpha_n) & \overline{\sigma_{s+t}(\alpha_n)} \end{pmatrix}$$

gilt.

Zusatzaufgabe für Interessierte.

(1,5+1,5+1 Punkte)

Sei R ein kommutativer Ring mit Eins, seien $m, n \in \mathbb{N}$ und seien $A, B \in M_{m \times n}(R)$. Die Matrix B entsteht durch *elementare Zeilen- bzw. Spaltenumformungen* aus A , falls endlich viele der drei folgenden Operationen hintereinander auf A ausgeführt wurden, um B zu erhalten.

- (i) Vertauschen zweier Zeilen bzw. Spalten von A .
- (ii) Multiplikation einer Zeile bzw. Spalte von A mit einer Einheit $u \in R^\times$.
- (iii) Addition des c -fachen einer Zeile bzw. Spalte i von A zu einer Zeile bzw. Spalte j von A mit $c \in R$ und $i \neq j$.

Sei $\operatorname{Span}(A)$ das durch die Zeilen von A erzeugte Untermodul von R^n .

- (a) Zeigen Sie, dass falls B durch eine elementare Zeilenumformung aus A entstanden ist, dann $R^n/\text{Span}(A) \simeq R^n/\text{Span}(B)$ gilt.
- (b) Zeigen Sie, dass falls B durch eine elementare Spaltenumformung aus A entstanden ist, dann $R^n/\text{Span}(A) \simeq R^n/\text{Span}(B)$ gilt.
- (c) Beschreiben Sie die Struktur von $\mathbb{Z}^3/\text{Span}\{(6, 10, 0), (6, 0, 15), (0, 10, 15)\}$ als Produkt zyklischer Gruppen.

Abgabe: Dienstag, den 15. Juli 2025, um 10:00 Uhr in den Briefkasten Nr. 17. Achten Sie auf eine saubere und lesbare Darstellung und heften Sie Ihre einzelnen Blätter zusammen.